مبادئ الإحصاء

الدكتور أحمد عبد السميع طبيّه

الطبعة الأولى

1429هـ - 2008م



رقم الإيداع لدى دائرة المكتبة الوطنية (1709 /7/ 2007)

519.5

طبيه ، أحمد

مبادئ الإحصاء/ أحمد عبد السميع طبيه._ عمان: دار البداية، 2007.

(   ) ص.

ر.أ: (2007/6/1709)

الواصفات: /الإحصاء الوصفي/

* تم إعداد بيانات الفهرسة والتصنيف الأولية من قبل دائرة المكتبة الوطنية.

ISBN: 978-9957-452-39-1 (ردمك)

الطبعة الأولى

2008م – 1428هـ



دار البداية ناشرون وموزعون

عمان - شارع الملك حسين - مجمع الفحيص التجاري

هاتف: ٤٦٤٠٦٧٩ تلفاكس: ٤٦٤٠٥٩٧

ص.ب ٥١٠٣٣٦ عمان ١١١٥١ الأردن

E-mail:info@daralbedayah.com
www.daralbedayah.com.

المحتويات

إهداء

إلى الماء الصافي لصورتي ....

والشجر العملاق لهامتي ....

والأفكار لكتابتي ....

والبصر لنظري ....

إلى سجيّتي ....

روح أبي رحمه الله ....

أمي رفيقة دربي ....

بقلم المؤلف

المقدّمة

الحمد لله رب العالمين وحده لا شريك له وبه نستعين

حاولت في هذا الكتاب ، أن أوضح موضوعات أساسية ومختارة من الإحصاء الوصفي والتطبيقي بما يتلاءم مع خطة الاحصاء لطلبة كليات المجتمع في الأردن والتي أقرّت من جامعة البلقاء التطبيقية، وقد وزعت الموضوعات على عشر وحدات، إذ تعالج الوحدة الأولى طبيعة علم الإحصاء وطرق جمع البيانات الإحصائية وعرضها.

أما الوحدة الثانية فتتناول مقاييس النزعة المركزية، وجاءت مقاييس التشتت في الوحدة الثالثة، ودرست الوحدة الرابعة مقاييس التفرطح والالتواء. وبالنسبة للوحدة الخامسة فقدَ اهتمت بالعلامة المعيارية والتوزيع الطبيعي ، أما الارتباط والانحدار فقد تناولته الوحدة السادسة، بينما اهتمت الوحدة السابعة بالأرقام القياسية، تليها الإحصاءات السكانية والحيوية والتي كانت موضوع الوحدة الثامنة وركزت الوحدة التاسعة على السلاسل الزمنية، وانتهى الكتاب بدراسة موضوع الاحتمالات والتي خصص لها الوحدة العاشرة.

وفي نهاية الكتاب أوردت أسئلة امتحان الشامل بالفترة 2003- 2006 محلولة بشكل مفصّل ليستطيع الطالب من خلالها قياس مدى استيعابه لمواضيع هذا الكتاب.

وأسأل الله أن أكون قد وفقت في عرض مواضيع هذا الكتاب بطريقة سهلة.

المؤلف



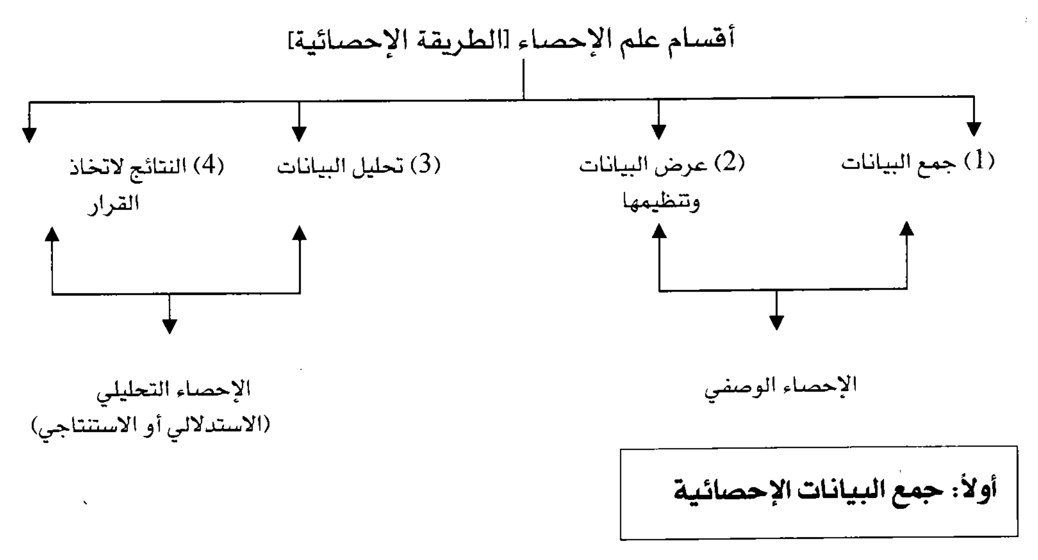
الوحدة الأولى

جمع البيانات وعرضها

محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
1 –1	مصادر جمع البيانات
2 –1	طرق جمع البيانات
3 –1	العينة وطرق اختيارها
4 –1	تنظيم البيانات
5 –1	عرض البيانات
6 –1	أنواع المنحنيات



تعريف علم الإحصاء: مجموعة النظريات والطرق العلمية التي تبحث في جمع البيانات وعرضها وتحليلها واستخدام النتائج في التنبؤ أو التقرير واتخاذ القرار.



أولاً: جمع البيانات الإحصائية

وهنا يتم رصد جميع المشاهدات للتجارب التي يجريها الباحث ونحتاج هنا لمعرفة أمرين:

أولاً: ما هي مصادر جمع البيانات

ثانياً: ما هي طرق جمع البيانات

المصادر التي يمكن من خلالها جمع البيانات

المصدر الأول: المصدر المباشر: النزول للميدان وجمع المعلومات مباشرة.

المصدر الثاني: المصدر الغير مباشر: ويندرج تحت هذا المصدر كل ما يلي

أ- السجلات أو الوثائق التاريخية.

ب- الاستبيان: أوراق تحوي مجموعة بيانات تعبئ من قبل الشخص الخاضع للبحث.

ج- المقابلات الشخصية: السؤال المباشر من قبل فريق معيّن من قبل الباحث.

د- الاختبارات الخاصة: اختبارات الذكاء.

طرق جمع البيانات

أولاً: المسح الشامل: جمع البيانات من جميع عناصر المجتمع الإحصائي وتمتاز نتائج هذه الطريقة بالدقة العالية والوضوح والتفصيل والمصداقية

سلبيات الطريقة	إيجابيات الطريقة
(1) ارتفاع التكاليف	(1) الدقة العالية.
(2) الحاجة إلى الوقت والجهد	(2) الوضوح والتفصيل.
(3) الحاجة إلى عدد كبير من الباحثين	(3) المصداقية

ثانياً: العينة: جزء من المجتمع الكلي قيد البحث وهنا يجب أخذ أقصى درجات الحيطة والحذر عند أخذ العينة لكي تمثل المجتمع تمثيلاً صادقاً وسليماً وهذا يتطلب منا تحديد هدف الدراسة ومجتمع الدراسة

ملاحظة هامة: مجتمع الدراسة دائماً يقسم إلى قسمين هما مجتمع الهدف، مجتمع العينة وتالياً مثال يوضح الفرق بينهما

مثال: دراسة عنوانها: الصعوبات التي تواجه طلبة البرنامج التجاري في كليات المجتمع في مادة الإحصاء حدد مجتمع الهدف، مجتمع العينة.

مجتمع الهدف: جميع طلبة البرنامج التجاري في كليات المجتمع.

مجتمع العينة: الجزء الذي تؤخذ منه العينة بمعنى الكليات التي أخذت منها العينة: كلية القادسية، كلية المجتمع الإسلامي..

سؤال: ناقش العبارة التالية: استخدام العينات هو الأسلوب الأكثر استخداماً في البحوث ومفضل على أسلوب المسح الشامل.

الإجابة:

1- المسح الشامل يؤدي إلى فساد عناصر المجتمع في بعض البحوث (الأدوية)

2- توفير الوقت والجهد والنفقات في أسلوب العينة.

3- المسح الشامل يحتاج إلى أعداد كبيرة من الباحثين ولعدم توفرهم نضطر للاستعانة بأشخاص قليلوا التدريب مما يزيد من نسبة الأخطاء.

4- الحاجة في بعض البحوث إلى النتائج بسرعة لاتخاذ القرار.

5- تعذرّ الوصول إلى جميع أفراد المجتمع.

أنواع العينات (حسب طرق اختيارها)

أولاً: العينة العشوائية البسيطة: وهي عينة بحجم معين يكون كل فرد فيها له نفس فرصة الاختيار من المجتمع الكلي .

- نستخدم العينة العشوائية البسيطة: عندما نختار جزء من كل ويكون الكل (المجتمع) نوع واحد وغير مقسم إلى أقسام
- طريقة اختيار العينة العشوائية البسيطة: تابع المثال الاتالي

مثال: إذا أردنا اختيار عينة مكونة من (10) طلاب من مجتمع مكوّن من (9000) طالب فإننا نقوم بما يلي.

الحل:

أ- بما أن عدد أفراد المجتمع (9000) [مكوّن من أربع منازل] إذن نرقم جميع عناصر المجتمع بأرقام متسلسلة تبدأ من (0000) وتنتهي بالرقم (8999)

ب- نذهب إلى جدول الأرقام العشوائية [انظر ملحق رقم [1] ونبدأ من جهة اليسار وبشكل عمودي وللأسفل ونختار (10) أرقام عشوائية وفي كل مرة نختار إذا

كان الرقم المختار أقل من أو يساوي (8999) نقبله وبغير ذلك نرفضه ونستمر إلى أن نحصل على الأرقام العشرة المطلوبة ليكون الأفراد الحاصلين على هذه الأرقام هم أفراد العينة العشوائية البسيطة.

والآن عزيز الطالب قم بحل المثال التالي:

تدريب: دراسة تُجرى على مجتمع مكوّن من (1000) شخص يراد اختيار عينة من (10) طلاب بناء على ما سبق حدد أفراد العينة المطلوبة من هذا المجتمع.

ثانياً: العينة الطبقية: وتستخدم عندما يكون المجتمع مقسّم إلى مجموعات بحيث تتشابه أفراد كل مجموعة بالصفات (تكون متجانسة) حيث تسمى كل مجموعة بالطبقة.

قانون	عدد أفراد عينة الطبقة = $\frac{\text{عدد أفراد الطبقة}}{\text{عدد أفراد المجتمع}}$ × عدد أفراد العينة الكلية

مثال: يُراد اختيار عينة مكونة من (20) طالب من طلبة إحدى الكليات إذا علمت أن عدد طلاب هذه الكلية (1000) طالب وهم مقسمين كما يلي [حسب السنة].

400 طالب سنة أولى، 300 طالب سنة ثانية، 200 طالب سنة ثالثة

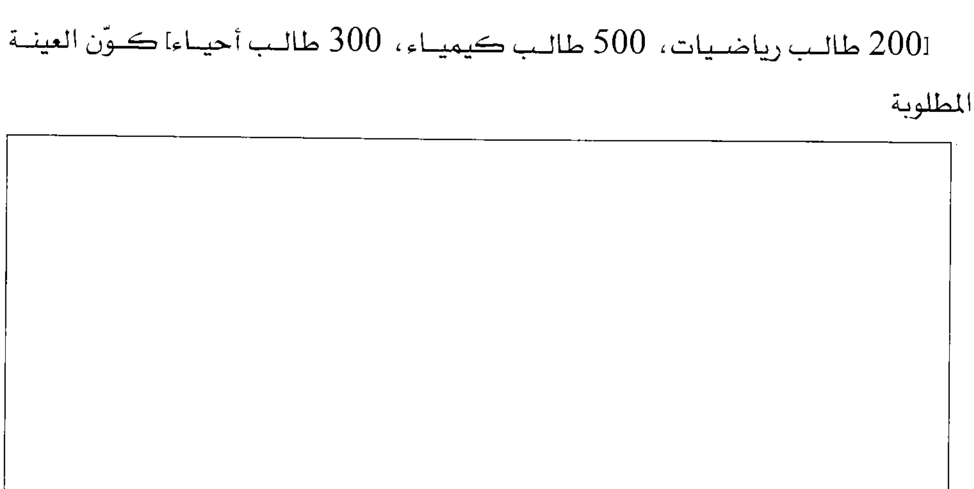
100 طالب سنة رابعة، بناء على ذلك كوّن العينة المطلوبة

الطلبة الأولى: (400)	الطبقة الثانية: (300)	الطبقة الثالثة: (200)	الطبقة الرابعة (100)
العدد = $\frac{400}{1000} \times 20$ = [8] ↓ نختار (8) من (400) حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (399)	العدد = $\frac{300}{1000} \times 20$ = [6] ↓ نختار (6) من (300) حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (299)	العدد= $\frac{200}{1000} \times 20$ = [4] ↓ نختار (4) من (200) حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (199)	العدد = $\frac{100}{1000} \times 20$ = [2] ↓ نختار (2) من (100) حسب العينة العشوائية البسيطة من (000) إلى (099)

أفراد العينة الطبقية

تدريب: عينة مكونة من (30) طالب من طلبة كلية العلوم في جامعة حكومية إذا علمت أن عدد طلاب هذه الكلية (1000) طالب مقسمين حسب التخصصات كما يلي:

[200 طالب رياضيات، 500 طالب كيمياء، 300 طالب أحياء] كوّن العينة المطلوبة

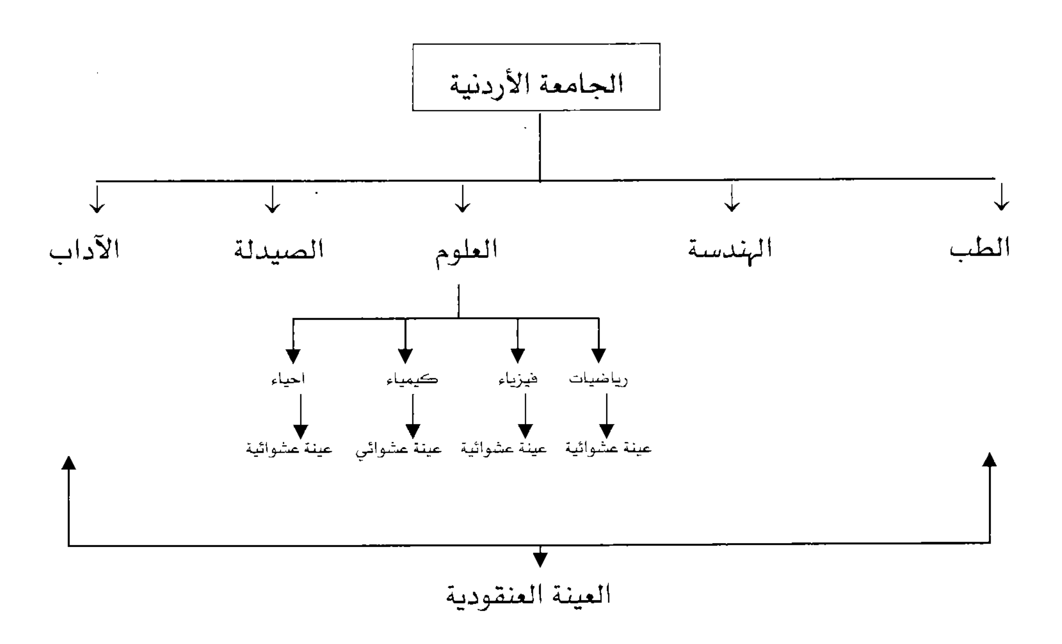


ثالثاً: العينة العنقودية [متعددة المراحل]: وهنا يقسم المجتمع إلى مجموعات جزئية لا يشترط تجانسها وهذه المجموعات الجزئية تقسم إلى مجموعات جزئية أخرى وهكذا بحيث تسمى أصغر مجموعة جزئية بالعنقود ومن ثم نختار من كل عنقود عينة عشوائية بسيطة ليتشكل في النهاية عينة عنقودية.

مثال: دراسة فرص عمل طلاب الجامعة الأردنية بعد التخرج حدد أفضل عينة

الحل: العينة يجب أن تكون عنقودية لأن هناك

طلاب جامعة ← طلاب كليات ← تخصصات كل كلية



الجامعة الأردنية
الطب
الهندسة
العلوم
الصيدلة
الآداب
رياضيات
فيزياء
كيمياء
احياء
عينة عشوائية
عينة عشوائية
عينة عشوائي
عينة عشوائية
العينة العنقودية

رابعاً: العينة المنتظمة: وتستخدم عندما لا يتوفر لدينا قوائم لعدد عناصر المجتمع ويتم اختيار أفراد العينة بشكل منتظم

مثال: دراسة مدى رضا طلاب الجامعة الأردنية عن المواصلات من وإلى الجامعة

الحل: هنا لا نعرف عدد الطلاب الذين يستخدمون المواصلات من وإلى الجامعة لذا يقف الباحث عند باب الجامعة ويختار مثلاً طالب من كل (50) كما يلي:

الطالب الأول، طالب رقم 50، طالب رقم 100، طالب رقم 150 وهكذا

[الزيادة بين كل عنصر والذي يليه ثابتة].

خامساً: العينة المعيارية: وهي أكثر الطرق صدقاً في تمثيل المجتمع الإحصائي

مثال: مصنع للأدوية يراد دراسة مدى فعاليته للشفاء من مرض معين.

الحل: يطبق الدواء على أول (10) مرضى وترصد فعاليته.

يطبق الدواء على أول (20) مريض وترصد فعاليته.

يطبق الدواء على أول (30) مريض وترصد فعاليته.

ونستمر حتى يثبت الدواء فعاليته فيعمم لعلاج المرض

سادساً: العينة العمدية أو الغرضية (القصدية): يتم اختيارها بصورة قصدية وغير عشوائية وذلك للحصول على معلومات لتكوين فكرة سريعة أو لفحص استبانة قبل توزيعها وتعميمها (لدراسة مدى صدق وثبات الاستبانة)

مثال: توزيع استبانة على عينة من أعضاء هيئة تدريس مختارين بشكل عمدي لفحص الاستبانة وتحكيمها.

ثانياً: تنظيم البيانات وعرضها

- بعد أن جمعنا البيانات تصبح هذه البيانات (المشاهدات) على شكل بيانات مفردة أو غير مبوّبة وعندما يكون عددها كبير جداً فإننا نصبح في أمس الحاجة إلى تنظيمها حتى نتمكن من التعامل معها لذا سنتعلم الآن عملية التنظيم على خطوتين هما:

الخطوة الأولى: تنظيم البيانات: ويصبح اسمها بيانات مبوّبة (مجدولة)

الخطوة الثانية: عرض البيانات: التمثيل البياني للبيانات

تنظيم البيانات

- وهنا تتم تنظيم المشاهدات في جداول خاصة تسمى بجداول التوزيع التكراري وهو جدول مكون من (5) أعمدة يأخذ الشكل التالي:

جدول علامات طلاب في امتحان من (20)

الفئات	الحدود الفعلية للفئات	مراكز الفئات	الإشارات	التكرارات
3 ـ 9 ↓ ↓ الحد الأدنى الحد الأعلى	2.5 ـ 9.5 ↓ ↓ الحد الأدنى الفعلي الحد الأعلى الفعلي	$\frac{9+3}{2}$ $= \frac{9.5+2.5}{2} = 6$	////	5 ↓ هناك (5) مشاهدات واقعة ضمن (3- 9)

وسنتعلم كيف نكون جدول التوزيع التكراري من خلال المثال التالي:

مثال: كوّن جدول توزيع تكراري لعلامات (30) طالب في امتحان ما كانت كما يلي:

46	49	48	58	54	50
40	62	37	48	54	75
54	48	59	45	34	58
47	61	49	44	68	39
63	56	43	57	40	45

نتبع الخطوات التالية لتكوين جدول التوزيع التكراري

أولاً: نجد المدى المطلق للبيانات حسب القانون التالي

المدى = أكبر مشاهدة – أصغر مشاهدة

$$= 75 - 34 = 41$$

ثانياً: نحدد عدد فئات مناسب لعدد البيانات [((لا يقل عن 5 ولا يزيد عن 15].

مثلاً: نريد (7) فئات

ثالثاً: نحدد طول الفئة حسب القانون التالي

$$\text{طول الفئة} = \frac{\text{المدى المطلق}}{\text{عدد الفئات}} = \frac{41}{7} = 5.7 \approx 6$$ (نقرّب لأقرب عدد صحيح)

رابعاً: نجد حدود الفئات والحدود الفعلية للفئات ومراكز الفئات

رقم الفئة	حدود الفئات الحد الأدنى = الحد الأعلى السابق + 1 الحد الأعلى = الحد الأدنى + طول الفئة – 1	الحدود الفعلية للفئات الحد الأدنى الفعلي = الحد الأدنى - 0.5 الحد الأعلى الفعلي = الأحد الأعلى +0.5	مراكز الفئات $\frac{\text{الأدنى + الأعلى}}{2} = \frac{\text{أدنى فعلي + أعلى فعلي}}{2}$
1	الحد الأدنى = أصغر مشاهدة أو أقل = 34 الحد الأعلى = 34 + 6- 1 = 39 39 - 34	الحد الأدنى الفعلي= 34–0.5 = 33.5 الحد الأعلى الفعلي= 39+0.5 =39.5 39.5 – 33.5	المركز = $\frac{39+34}{2}$ $\frac{39.5+33.5}{2}$ = 36.5
2	45 -40	45.5 – 39.5	42.5
3	51 – 46	51.5 – 45.5	48.5
4	57 -52	57.5 -51.5	54.5
5	63 -58	63.5 -57.5	60.5
6	69 -64	69.5 -63.5	66.5
7	75 -70	75.5 -69.5	72.5

خامساً: تفرغ البيانات في الجدول المنتج في الخطوة الرابعة بوضع اشارة (/) لكل مشاهدة محتواه ضمن الفئة وتكون الإشارة الخامسة مستعرضة لسهولة الجمع ثم تجمع الإشارات لكل فئة ليكون ناتج الجمع هو تكرار الفئة.

الفئات	الحدود الفعلية للفئات	مراكز الفئات	الإشارات	التكرارات
39 -34	39.5 -33.5	36.5	///	3
45 -40	45.5 -39.5	42.5	/ ////	6
51 -46	51.5 -45.5	48.5	/// ////	8
57 -52	57.5 -51.5	54.5	/ ////	6
63 -58	63.5 -57.5	60.5	////	5
69 -64	69.5 -63.5	66.5	/	1
75 -70	75.5 -69.5	72.5	/	1
	مجموع التكرارات			30

لاحظ أن : طول الفئة = الفرق بين مركزين متتاليين = الحد الأعلى – الحد الأدنى+1

= الحد الأعلى الفعلي – الحد الأدنى الفعلي

وبعد هذا الجدول يختصر في جدول أبسط مكون من عمودين

الفئات	التكرار
39 -34	3
45 -40	6
51 -46	8
57 -52	6
63 -58	5
69 -64	1
75 -70	1

تدريب: البيانات التالية تمثل الأجر الأسبوعي لـ (50) موظف والمطلوب وضع البيانات في جدول تكرار يتكون من (6) فئات

19 -28 -32 -31 -36 -28 -17 -43 - 42 – 56

42 -17 -20 -55 -52 -45 -39 -21 -20 -24

45 -24 -22 -30 -29 -36 -38 -32 -26 -24

24 -21 -48 -28 -41 -54 -57 -56 -25 -24

36 -57 -35 -18 -33 -46 -47 -32 -18 -42

أنواع التوزيعات التكرارية

وجميع هذه الأنواع يتم إيجادها بالاعتماد على جدول التوزيع التكراري السابق

أولاً: جدول التوزيع التكراري: وهو ما تم شرحه سابقاً ويكون مكون من عمودين الفئات، التكرارات

ثانياً: جدول التكرارات النسبية: وهو مكون من عمودين هما

الفئات	التكرار	التكرار النسبي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$
0- 4	4	$\frac{4}{100} = 0.04$
5- 9	5	$\frac{5}{100} = 0.05$
10- 14	15	$\frac{15}{100} = 0.15$
15- 19	25	$\frac{25}{100} = 0.25$
20- 24	6	$\frac{6}{100} = 0.06$
25- 29	5	$\frac{5}{100} = 0.05$
30- 34	40	$\frac{40}{100} = 0.40$
المجموع	100	مجموع التكرارات النسبية =1

قاعدة : مجموع التكرارات النسبية دائماً يساوي (1)

ثالثاً: جدول التوزيع التكراري المئوي

الفئات	التكرار	التكرار المئوي = $\frac{\text{تكرار الفئة}}{\text{مجموع التكرارات}}$ ×100 = النسبي × 100
0- 4	4	$\frac{4}{100} \times 100 = 4$
5- 9	5	$\frac{5}{100} \times 100 = 5$
10- 14	15	$\frac{15}{100} \times 100 = 15$
15- 19	25	$\frac{25}{100} \times 100 = 25$
20- 24	6	$\frac{6}{100} \times 100 = 6$
25- 29	5	$\frac{5}{100} \times 100 = 5$
30- 34	40	$\frac{40}{100} \times 100 = 40$
المجموع	100	مجموع التكرارات المئوية = 100

قاعدة: مجموع التكرارات المئوية دائماً يساوي (100)

رابعاً: التوزيع التكرار المتجمّع [الصاعد والنازل]

مثال: اليك الجدول التكراري التالي بناء عليه كوّن

أولاً: جدول التوزيع التكراري الصاعد

ثانياً: جدول التوزيع التكراري الهابط

فئات	تكرار
4- 6	7
7- 9	5
10- 12	10
13- 15	8
16- 18	10

جدول التوزيع التكراري الصاعد

الحدود الفعلية العليا	التكرار الصاعد
أقل من (3.5)	صفر
أقل من 6.5	7 = 0+ 7
أقل من 9.5	12 = 7+5
أقل من 12.5	22=12+ 10
أقل من 15.5	30=8+ 22
أقل من 18.5	40 = 10+ 30

فئة مضافة تكرارها (0) ← (الفئة الأولى)

التكرار الصاعد للفئة الأخيرة هو نفسه مجموع التكرارات

جدول التوزيع التكراري الهابط

الحدود الفعلية الدنيا	التكرار الهابط
أكثر من (3.5)	40
أكثر من (6.5)	33=7–40
أكثر من (9.5)	28=5–33
أكثر من (12.5)	18=10–28
أكثر من (15.5)	10=8–18
أكثر من (18.5)	10–10= صفر

التكرار الهابط للفئة الأولى هو نفسه مجموع التكرارات

فئة مضافة بعد الأخيرة تكرارها (0)

خامساً : الجداول المقفلة والمفتوحة

الجداول المقفلة: الجداول التكرارية التي تكون بها الفئة الأولى والأخيرة محدودة

الجداول المفتوحة: وهي تقسم إلى قسمين:

جداول مفتوحة من الأعلى	جداول مفتوحة من الأسفل
نهاية الفئة الأخيرة غير محدد	بداية الفئة الأولى غير محدد

مثال (جداول مفتوحة من الأعلى)

فئات	تكرار
4- 6	
7- 9	
أكثر من 9	

مثال (جداول مفتوحة من الأسفل)

فئات	تكرار
أقل من 7	
7- 9	
10- 12	

سادساً: الجداول المنتظمة وغير المنتظمة: وذلك حسب طول الفئة

الجداول المنتظمة

تكون أطوال جميع الفئات متساوية

(طول الفئة ثابت دائماً)

فئات	تكرار
4–6	7
7–9	5
10–12	10

الجداول غير المنتظمة

أطوال جميع الفئات متغيرة ولكل فئة طول خاص

فئات	تكرار	التكرار المعدل
2- 5	3	التكرار / طول الفئة $= \frac{3}{3} = 1$
5- 11	12	$\frac{12}{6} = 2$
11- 15	8	$\frac{8}{4} = 2$

التكرار المعدل = تكرار الفئة / طول الفئة

تدريب: اعتمد على الجدول التكراري التالي في الإجابة عن كل مما يلي:

أولاً: كوّن جدول التكرار النسبي

ثانياً: كوّن جدول التكرار المئوي

ثالثاً: كوّن جدول التوزيع التكراري الصاعد

رابعاً: كوّن جدول التوزيع التكراري النازل

فئات	تكرار
4- 6	6
7- 9	2
10- 12	8
13- 15	4

أولاً: عرض البيانات غير المبوّبة (المفردات) (البيانات الأولية)

أ- طريقة الجدول: تفريغ البيانات في جداول منتظمة وخصوصاً البيانات المرتبطة بالزمن [عرض الظاهرة مع مسمى أو زمن].

مثال: الجدول التالي يوضح عدد الطلبة في بعض كليات المجتمع عام 81

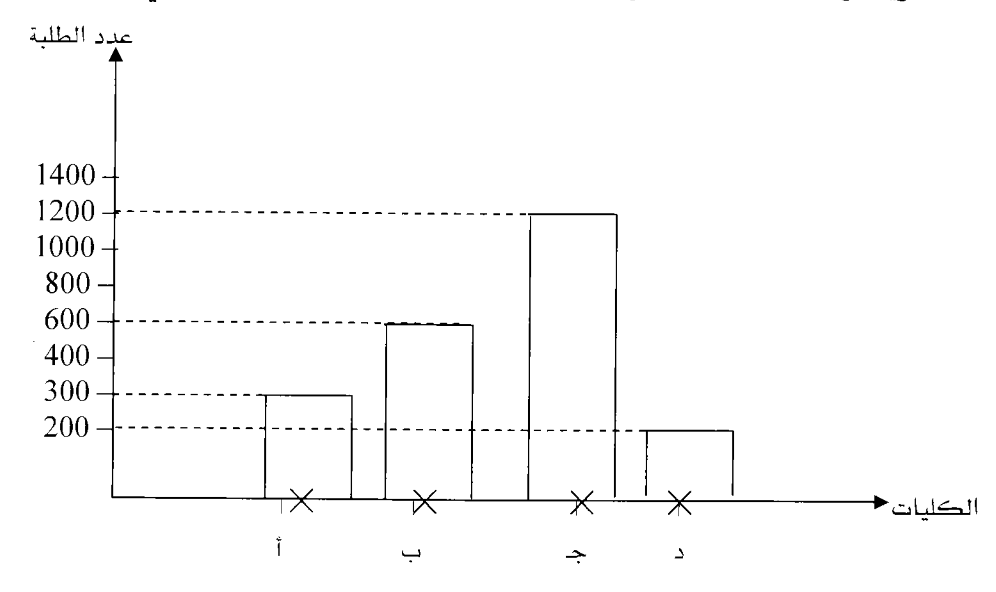
الكلية	عدد الطلبة
أ	300
ب	600
جـ	1200
د	200

ب- طريقة المستطيلات أو الأعمدة : رسم محورين أفقي وعمودي ويستخدم للمقارنة بين ظاهرتين أو تتبع تغير ظاهره مع الزمن

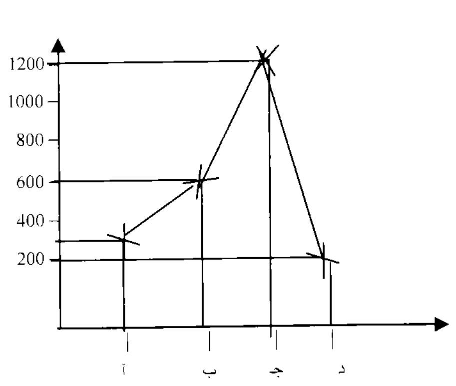
المحور الأفقي: المسميات (وحدات، طلاب، طالبات، ...)

المحور العمودي: الأعداد [قيمه المسمى الموجود على المحور الأخير]

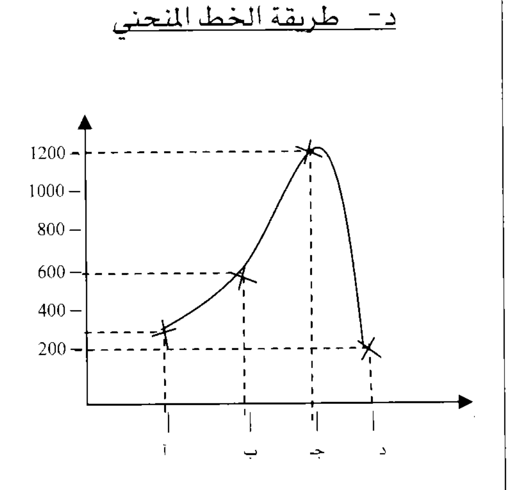
ويكون هناك مستطيل ارتفاعه يمثل العدد المقابل على المحور العمودي



جـ- طريقة الخط المنكسر



د- طريقة الخط المنحني



هـ) طريقة الصور والرسومات

مثال: الجدول التالي يمثل عدد البطاريات المنتجة في الفترة [1990- 1992] اعتمد عليه في عرض هذه البيانات بطريقة الصور والرسومات علماً بأنه:

عام 1990 كان الإنتاج (10000 بطارية) وعام 1991 كان الإنتاج (15000 بطارية)

وعام 1992 كان الإنتاج 20000 بطارية

الحل: لنفرض أن شكل البطارية سيمثل بالشكل ( ) وسنمثّل كل (5000) بطارية في الشكل ( ) وبناء على ذلك سيكون التمثيل بالصور والرسومات كما يلي:

ملاحظة: العدد الأنسب للبطارية الواحدة (5000) يتم اختياره بحيث يكون مساوٍ لأقل إنتاج أو أصغر منه بحيث يقبل القسمة على جميع الأعداد {10000، 15000، 20000}.

السنة	الإنتاج الكلي
1990	$\frac{\text{إنتاج السنة}}{\text{عدد البطارية}} = \frac{10000}{5000} = 2$
1991	$\frac{15000}{5000} = 3$
1992	$\frac{20000}{5000} = 4$

السنة	الإنتاج الكلي
1990	(رمزان)
1991	(ثلاثة رموز)
1992	(أربعة رموز)

و- طريقة الدائرة (القطاعات الدائرية) [أهم طريقة]

يتم تقسيم الدائرة إلى قطاعات بنسبة قيم الظاهرة وبحسب قياس زاوية كل قطاع [الدائرة تمثل 360 درجة] حيث أن:

$$\text{زاوية القطاع} = \text{درجة كل قطاع} = \frac{\text{عدد التكرارات الخاصة بالقطاع}}{\text{العدد الكلي}} \times 360^{\circ}$$

مثال: البيانات التالية تمثل أعداد طلاب احدى الكليات الجامعية موزعين حسب التخصص

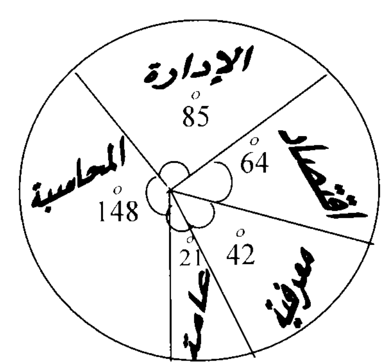
التخصص	عدد الطلاب
المحاسبة	2100
الإدارة	1200
الاقتصاد	900
علوم مصرفية	600
الإدارة العامة	300

مثّل هذه البيانات بطريقة القطاعات الدائرية

أولاً: نحسب زاوية كل قطاع (تخصص)

قطاع المحاسبة	قطاع الإدارة	قطاع الاقتصاد	قطاع المصرفية	قطاع الإدارة العامة
$\frac{2100}{5100} \times 360^{\circ}$	$\frac{1200}{5100} \times 360^{\circ}$	$\frac{900}{5100} \times 360^{\circ}$	$\frac{600}{5100} \times 360^{\circ}$	$\frac{300}{5100} \times 360^{\circ}$
148°	85°	64°	42°	21°

ثانياً: نستخدم المنقلة لتمثيل القطاعات وهنا نتخذ اتجاه واحد للتمثيل إما مع عقارب الساعة (منذ القطاع الأول وحتى الأخير) أو عكس عقارب الساعة



تدريب: مصنع ينتج أربع أنواع من الأدوية وكمية انتاجه من النوع الأول (10) ومن النوع الثاني (30) ومن النوع الثالث (50) ومن النوع الرابع (10)

بناء على ما سبق مثل هذه البيانات الأولية بكل من الطرق التالية

أولاً: بالجدول. ثانياً: بالمستطيلات والأعمدة

ثالثاً: الخط المنكسر رابعاً: الخط المنحني

خامساً: بالصور والرسومات سادساً: بالقطاعات الدائرية.

ثانياً: عرض البيانات المبوّبة (الجداول) [تمثيل التوزيعات التكرارية بيانياً]

مثال: الجدول التالي يمثل علامات (30) طالب مبوّبة في جدول تكراري كما يلي بناء عليه مثل هذا الجدول بكل من الطرق التالية:

تكرار	فئات
3	39 -34
6	45 -40
8	51 -46
5	57 -52
6	63 -58
1	69 -64
1	75 -70

أولاً: المدرّج التكراري

ثانياً: المضلع التكراري

ثالثاً: المنحنى التكراري

رابعاً: المنحنى التكراري التراكمي (المتجمع الصاعد)

خامساً: المنحنى التكراري المتجمع الهابط (مضلع تكراري هابط)

أولاً: المدرّج التكراري

التكرار	الحدود الفعلية للفئات
3	39.5 -33.5
6	45.5 - 39.5
8	51.5 -45.5
5	57.5 -51.5
6	63.5 -57.5
1	69.5 -63.5
1	75.5 -69.5

التكرار

9
8
7
6
5
4
3
2
1

33.5 39.5 45.5 51.5 57.5 63.5 69.5 75.5

الحدود الفعلية للفئات

ثانياً: المضلع التكراري

مراكز الفئات	التكرارات
30.5	صفر
36.5	3
42.5	6
48.5	8
54.5	5
60.5	6
66.5	1
72.5	1
78.5	صفر

فئة مضافة (30.5)

فئة مضافة (78.5)

ثالثاً: المنحنى التكراري

التكرار

8, 6, 5, 3, 1

30.5 36.5 42.5 48.5 54.5 60.5 66.5 72.5 78.5

مراكز الفئات

رابعاً: المضلع التكراري الصاعد

الحدود الفعلية العليا	التكرار الصاعد
أقل من 33.5	صفر
أقل من 39.5	3
أقل من 45.5	9
أقل من 51.5	17
أقل من 57.5	22
أقل من 63.5	28
أقل من 69.5	29
أقل من 75.5	30

فئة مضافة (33.5)

التكرار الصاعد

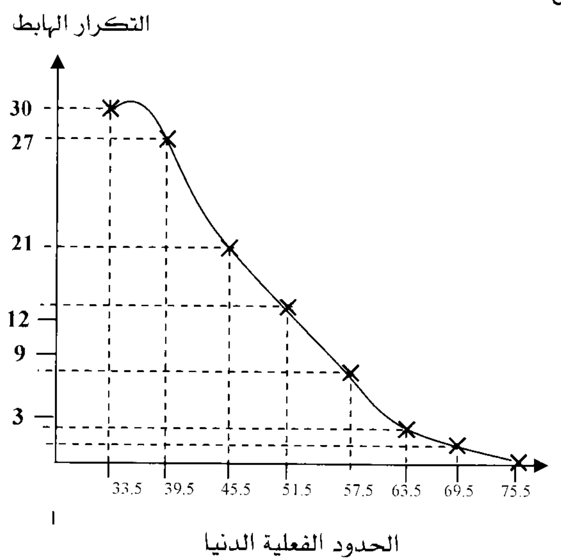
27, 21, 18, 9, 3

33.5 39.5 45.5 51.5 57.5 63.5 69.5 75.5

الحدود الفعلية العليا

خامساً: المضلع التكراري النازل

الحدود الفعلية الدنيا	التكرار النازل
أكثر من (33.5)	30
أكثر من (39.5)	27
أكثر من (45.5)	21
أكثر من (51.5)	13
أكثر من (57.5)	8
أكثر من (63.5)	2
أكثر من (69.5)	1
آكثر من (75.5)	صفر



تدريب: الجدول التالي يمثل أعمار أشخاص اعتمد عليه في تمثيل الجدول بالطرق التالية

أولاً: بالمدرج التكراري

ثانياً: المضلع والمنحنى التكراري على نفس المستوى

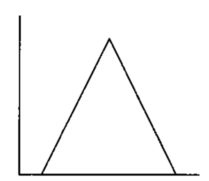
ثالثاً: المضلع التكراري الصاعد والنازل على نفس المستوى

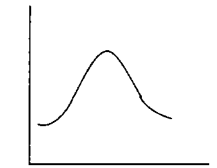
فئات	التكرار
1- 4	3
5- 8	2
9- 12	5
13- 16	10
17- 20	10

أنواع المنحنيات التكرارية

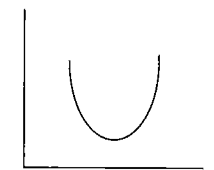
أولاً: المنحنيات المتماثلة: تتوزع قيمها بشكل متماثل على خط المنتصف

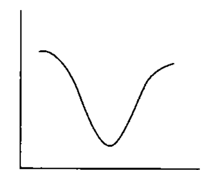
أ- المنحنى الطبيعي (الجرسي)





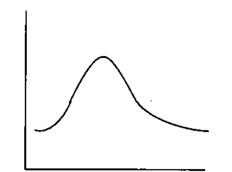
ب- منحنى شكل حرف U أو النوني



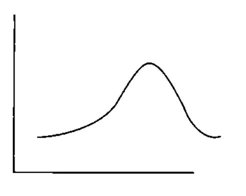


ثانياً: المنحنيات غير المتماثلة (الملتوية) أحد أطرافها أطول من الطرف الآخر

أ- ملتوية نحو اليمين
(التواء موجب)
يقع الطرف الطويل للجهة اليمنى



ب- ملتوية نحو اليسار
(التواء سالب)
يقع الطرف الطويل للجهة اليسرى



جـ- التواء شديد لليمين أو اليسار

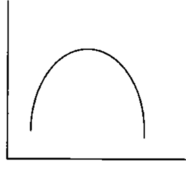


التواء شديد
إلى اليسار
(الرائي)

التواء شديد
إلى اليمين
(مقلوب حرف ر)

ثالثاً: منحنيات متعددة القمم

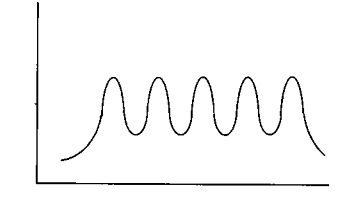
أ- منحنى قمة واحدة
(منوال واحد)



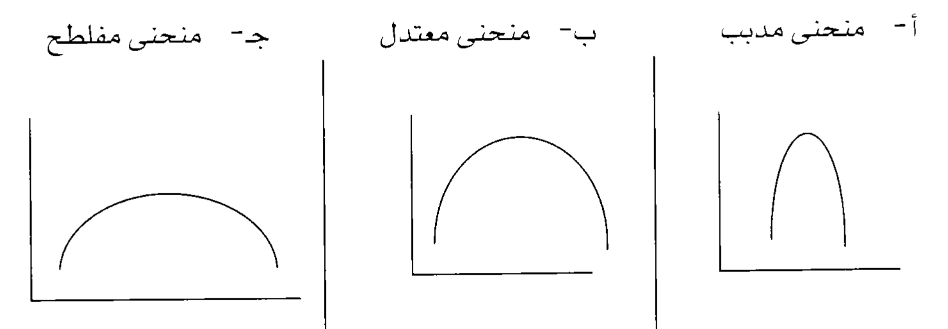
ب- منحى قمتان (منوالان)



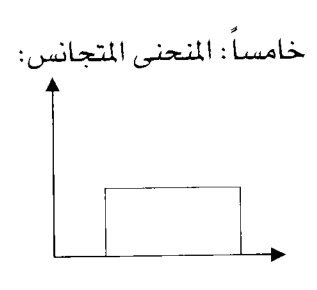
جـ- منحنى متعدد القمم (متعددالمنوالات)



رابعاً: منحنيات متفلطحة (مدببة القمم أو معتدلة القمم)

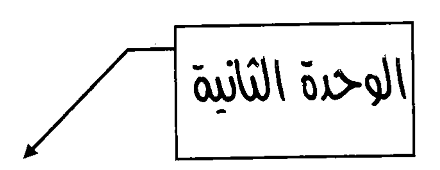


خامساً: المنحنى المتجانس:



انتهت الوحدة الأولى

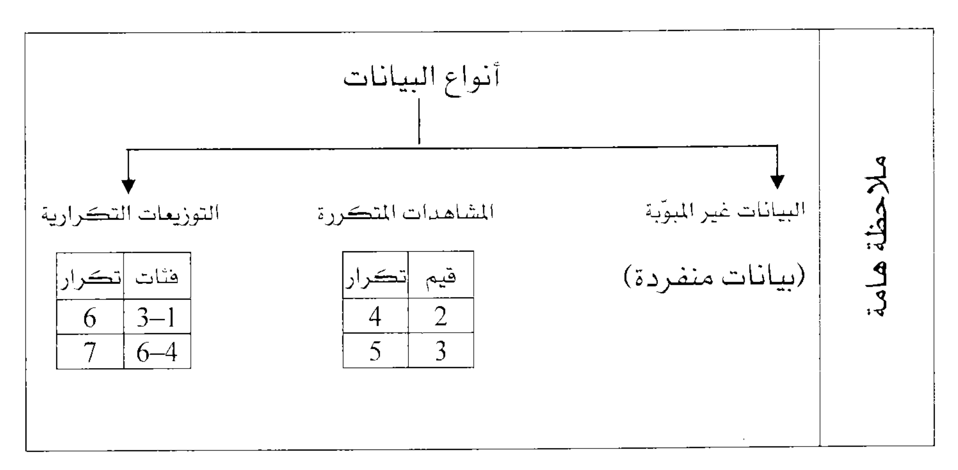




مقاييس النزعة المركزية

محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
2- 1	الوسط الحسابي
2- 2	الوسيط
2- 3	المنوال
2- 4	العلاقة الخطية بين الوسط والوسيط والمنوال
2- 5	الميئنات والرتب الميئنية
2- 6	العشيرات والربيعات





أن الطرق الإحصائية التي تقوم بحساب القيمة التي تتمركز حولها معظم المشاهدات تسمى مقاييس النزعة المركزية وهي ثلاثة مقاييس:

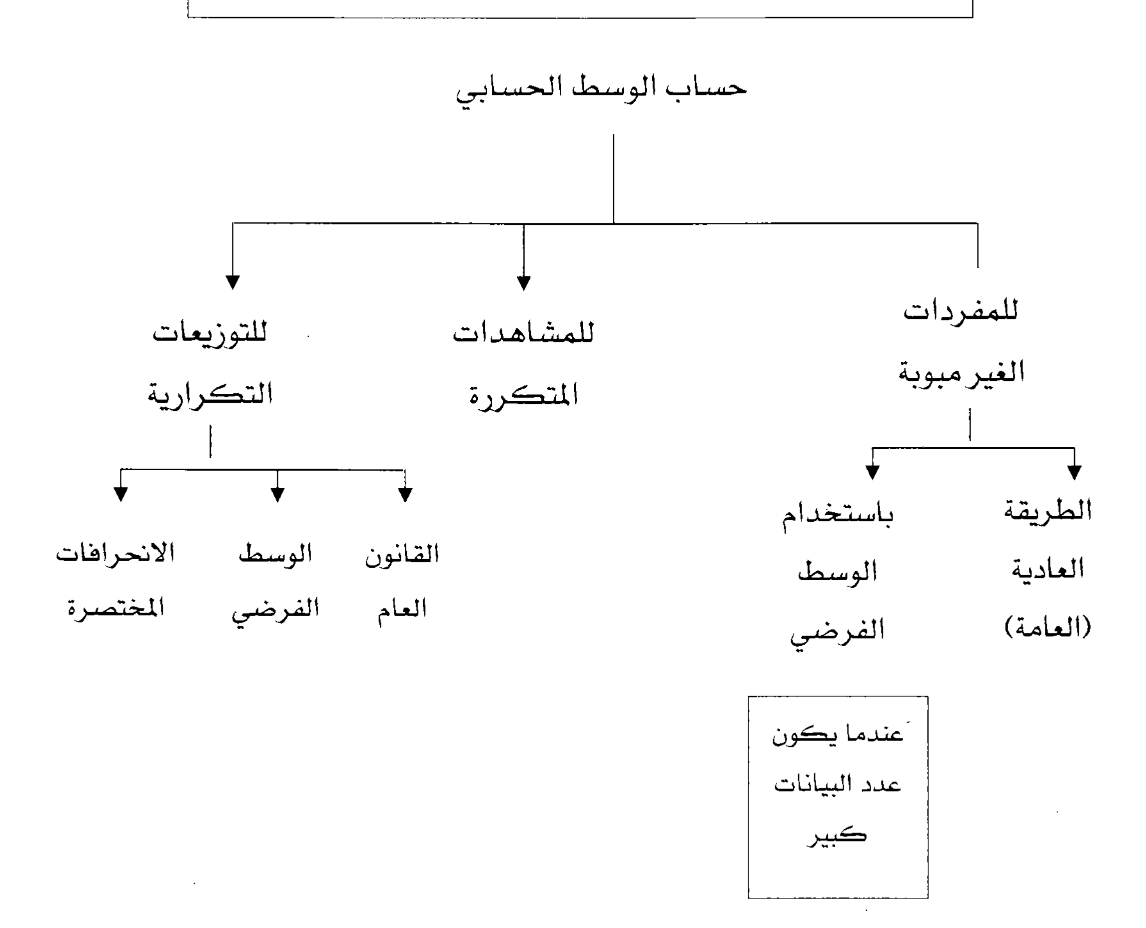
أولاً: الوسط الحسابي　　　ثانياً: الوسيط　　　ثالثاً: المنوال.

وسنتعلم حساب كل منها إلى أنواع البيانات الثلاثة (الغير مبوبة، المشاهدات المتكررة، توزيعات تكرارية)

سنعتمد مفتاح الرموز التالي في هذه الوحدة

البيانات غير المبوبة	المشاهدات المكرّرة	المفردات المبوّبة
$س_{ر}$: المشاهدة الرائية $س_2$: المشاهدة الثانية	$س_{ر}$: المشاهدة الرائية $س_2$: المشاهدة الثانية	$س_{ر}$: مركز الفئة الرائية $س_2$: مركز الفئة الثانية
ن: عدد المفردات	ت ر: عدد تكرارات المشاهدة الرائية ت 3: تكرار المشاهدة الثالثة	ت ر: عدد التكرارات الفئة الرائية ت3: تكرار الفئة الثالثة
$\sum$(س): مجموع المشاهدات	$\sum$ ت: مجموع التكرارات	$\sum$ت: مجموع التكرارات

أولا : حساب الوسط الحسابي (سَ أو $\bar{X}$)



<u>الوسط الحسابي في حالة المفردات غير المبّوبة</u>

أولاً: حساب الوسط الحسابي للمفردات غير المبّوبة بالطريقة العادية (العامة)

إذا كان لدينا المفردات س**1** ، س**2**، س**3**، ......، س$_{ن}$ فإن الوسط الحسابي هو

$$\bar{\text{س}} = \frac{\text{س}_1+\text{س}_2+...+\text{س}_{\text{ن}}}{\text{ن}} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجموع المفردات}}{\text{عدد المفردات}}$$

حيث س: المشاهدة ، ن: عدد القيم (المشاهدات)

مثال (1) احسب الوسط الحسابي للمفردات التالية بالطريقة العادية (العامة)

16،30،25،27،18،21،29

الحل: الوسط الحسابي = $\bar{س}$ = $\frac{16+30+25+27+18+21+29}{7} = 23.7$

مثال (2) إذا كان مجموع ما مع (10) طلاب هو (230) دينار جد الوسط الحسابي لما مع هؤلاء الطلاب :

الحل: $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} \Leftrightarrow \bar{س} = \frac{230}{10} = 23$ دينار

مثال (3): إذا كان الوسط الحسابي لعلامات عدد من الطلاب هو (56) ومجموع علاماتهم (2800) فجد عدد هؤلاء الطلاب.

الحل: الوسط الحسابي = $\bar{س}$ = 56، مجموع علاماتهم = مجـ س = 2800، ن = عدد الطلاب =؟

$\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} \Leftrightarrow \frac{56}{1} = \frac{2800}{ن} \Leftrightarrow \frac{56 \times ن}{56} = \frac{2800}{56}$

ن = $\frac{2800}{56} = 50$ طالب

مثال **(4)** اعتمد على المفردات (**1**، **4**، **7**، **5**، **3**) في إيجاد:

الوسط الحسابي ($\bar{س}$)

$\bar{س} = \frac{1+4+7+5+3}{5}$

$= 4$

انحرافات القيم عن الوسط الحسابي

المشاهدة (س)	انحرافها عن الوسط $س - \bar{س}$
1	$1-4= -3$
4	$4-4=0$
7	$7-4=3$
5	$5-4=1$
3	$3-4= -1$

أوجد مجموع انحرافات القيم عن الوسط الحسابي

$\sum(س-\bar{س}) = -3+0+3+1+-1 =$ صفر

قاعدة	$\sum(س-\bar{س}) =$ صفر

مثال (5) إذا كانت انحرافات القيم عن وسطها الحسابي: 2، 3، أ، −4 فجد قيمة (أ)

الحل: بما أن $\sum(س-\bar{س}) =$ ∴ ⇔ $2+3+أ-4=$ ∴ ⇔ $1+أ=$ ∴ ⇔ $أ = -1$

ثانياً: حساب الوسط الحسابي للمفردات غير المبّوبة بطريقة الوسط الفرضي (ف)

رمز الوسط الفرضي = ف، الوسط الحسابي = $\bar{س}$

وتستخدم هذه الطريقة عادة إذا كان عدد المشاهدات كبير

مثال: أوجد الوسط الحسابي بطريقة الوسط الفرضي للبيانات التالية.

29، 21، 18، 27، 25، 30، 16

الحل:

<table>
<tr><th>أولاً</th><th>ثانياً</th><th>ثالثاً</th></tr>
<tr>
<td>نحدد قيمة للوسط الفرضي (ف) وهو رقم نفترض أنه سيكون ناتج الوسط الحسابي [أي رقم] ضمن المفردات

ف= 20

دائماً يبقى الوسط الحسابي ثابت مهما تغيرت قيمة</td>
<td>
<table>
<tr><th>المفردات (س)</th><th>انحرافها عن الوسط الفرضي ح=س−ف</th></tr>
<tr><td>29</td><td>9=20−29</td></tr>
<tr><td>21</td><td>1=20−21</td></tr>
<tr><td>18</td><td>2- =20−18</td></tr>
<tr><td>27</td><td>7=20−27</td></tr>
<tr><td>25</td><td>5=20−25</td></tr>
<tr><td>30</td><td>10=20−30</td></tr>
<tr><td>16</td><td>4- =20−16</td></tr>
<tr><td colspan="2">$\sum$ (س − ف) = ح=26</td></tr>
</table>
</td>
<td>$\bar{\text{س}} = \text{ف} + \frac{\sum \text{ح}}{\text{ن}}$

$\bar{\text{س}} = \mathbf{20} + \frac{26}{7}$

$\bar{\text{س}} = \mathbf{23.7}$</td>
</tr>
</table>

تمرين شامل على الوسط الحسابي للبيانات غير المبّوبة [تمرين ذاتي].

مثال: البيانات التالية تمثل عدد الأزهار الموجودة على (8) نباتات من القطن :

22، 15، 12، 25، 30، 22، 28، 18

أولاً: أوجد الوسط الحسابي بالطريقة العادية [الجواب] هو 21.5].

ثانياً: أوجد الوسط الحسابي باعتبار وسط فرضي مقدراه (12) [الجواب هو 21.5].

الوسط الحسابي للمشاهدات المتكرّرة

مثال: إذا كانت علامات طالب في (10) مواد كالتالي

العلامة	60	75	84	89	مجموع المواد
عدد المواد	2	3	4	1	10

أوجد الوسط الحسابي لعلامات هذا الطالب

أولاً

العلامة (س)	عدد المواد التكرار (ت)	س× ت
60	2	120=60×2
75	3	225=3×75
84	4	336=4×84
89	1	89=1×89
المجموع	10	Σ (س×ت) = 770

Σ(س×ت)= مجموع حواصل ضرب المشاهدة × تكرارها

ثانياً

$$\bar{س} = \frac{\sum(س \times ت)}{\sum ت}$$

$$\bar{س} = \frac{770}{10} = 77$$

مثال: مجموعة من المشاهدات المتكررة وسطها الحسابي (14) ومجموع تكراراتها (30) بناء على ما سبق احسب مجموع حواصل ضرب المشاهدة بتكرارها..

الحل: $\bar{س}$ = 14، ∑ت = 30، ∑(س×ت) = ؟؟

$\bar{س} = \frac{∑(س×ت)}{∑ت}$ (المشاهدات المتكررة) ⇔ $\frac{14}{1} \times \frac{∑(س×ت)}{∑30}$

∑(س×ت) = 14×30 = 420

الوسط الحسابي للتوزيعات التكرارية

أولاً: إيجاد الوسط الحسابي للتوزيعات التكرارية بطريقة القانون العام.

مثال: احسب الوسط الحسابي للجدول التكراري التالي بطريقة القانون العام.

فئات	26–22	31–27	36–32	41–37	46–42	51–47
تكرار	9	3	10	8	12	8

أولاً

الفئات	التكرار (ت)	مركز الفئة (س)	س×ت
22–26	9	$24 = \frac{26+22}{2}$	216=24×9
27–	3	29	87=29×3
32–	10	34	340=34×10
37–	8	39	312=39×8
42–	12	44	528=44×12
47–	8	49	392 =49×8
المجموع	50		∑(س×ت)= 1875

ثانياً

$\bar{س} = \frac{∑(س×ت)}{∑ت}$

$\bar{س} = \frac{1875}{50} = 37.5$

$\bar{س} = 37.5$

ثانياً: إيجاد الوسط الحسابي للتوزيعات التكرارية بطريقة الوسط الفرضي [ف]

مثال: احسب الوسط الحسابي للجدول التكراري التالي بطريقة الوسط الفرضي.

فئات	44–40	49–45	54–50	59–55	64–60
تكرار	10	20	40	20	10

أولاً

نفرض أن ف=62

مهما تغيرت قيمة (ف) يبقى جواب السؤال ($\bar{س}$) كما هو

ثانياً

فئات	التكرار	مراكز الفئات (س)	انحراف عن الوسط الفرضي ح= س–ف	ح×ت
44–40	10	42	20–=62–42	200-
49–45	20	47	15-	300-
54–50	40	52	10-	400-
59–55	20	57	5-	100-
64–60	10	62	صفر	صفر
المجموع	100		5–	1000–

ثالثاً

$$\bar{س} = ف + \frac{\sum (س \times ت)}{\sum ت}$$

$$\bar{س} = 62 + \frac{-1000}{100}$$

$$= 62 - 10 = 52$$

$$\bar{س} = 52$$

ثالثاً: إيجاد الوسط الحسابي للتوزيعات التكرارية بطريقة الانحرافات المختصرة

ونلجأ لهذه الطريقة عندما يكون (ح: الانحراف عن الوسط الفرضي) كبير نوعاً ما [المثال السابق]

مثال: أوجد الوسط الحسابي للجدول التالي بطريقة الانحرافات المختصرة.

فئات	44–40	49–45	54–50	59–55	64–60
تكرار	10	20	40	20	10

أولاً

نفرض وسط فرضي (ف)

ف= 62

نجد طول الفئة

ل= 44– 40 +1=5

ل = 5

ثانياً

فئاته	تكرار (ت)	مراكز الفئات (س)	ح= س–ف	$\bar{ح} = \frac{ح}{ل}$	$\bar{ح}$ × ت
–40 44	10	42	20–	$\frac{20-}{5}$ =–4	–=10×4– 40
–45 49	20	47	15-	$\frac{15-}{5}$ =–3	60–
–50 54	40	52	10-	$\frac{10-}{5}$ =–2	80–
–55 59	20	57	5-	$\frac{5-}{5}$ = –1	20–
–60 64	10	62	صفر	$\frac{0}{5}$ =0	صفر
المجموع	100				200-

ثالثاً

$$\bar{س} = ف + \frac{\sum (\bar{ح} \times ت)}{\sum ت} \times ل$$

$$\bar{س} = 62+ \frac{-200}{100} \times 5$$

$$\bar{س} = 62- (2\times 5)$$

$$\bar{س} = 52$$

تمرين شامل على الوسط الحسابي (تمرين ذاتي)

مثال: اعتمد على الجدول التكراري التالي في الإجابة عن كل مما يلي

فئات	54–50	59–55	64–60	69–65	74–70
تكرار	10	12	8	14	6

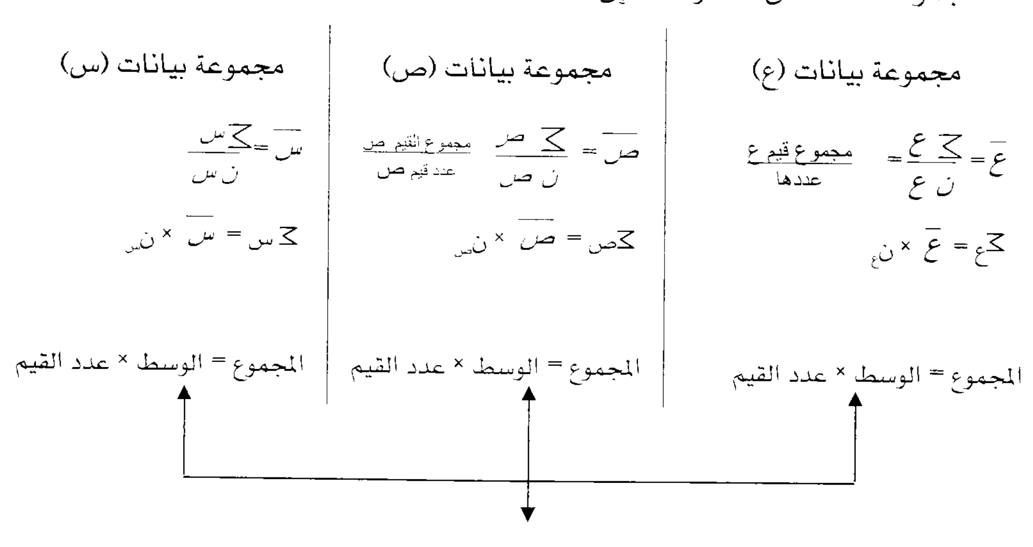
أولاً: أوجد الوسط الحسابي بالقانون العام [= 61.4].

ثانياً: احسب الوسط الحسابي بوسط فرضي مقداره (62) [= 61.4].

ثالثاً: احسب الوسط الحسابي بطريقة الانحرافات المختصرة [= 61.4].

الوسط الحسابي المرجح

إذا كان لدينا أكثر من مجموعة من البيانات (ع، ص، س) بحيث يكون لكل مجموعة خصائص مشتركة فإن:



الوسط الحسابي المرجح

الوسط الحسابي المرجح للمفردات = $\frac{\text{المجموع}}{\text{العدد}} = \frac{\sum س + \sum ص + \sum ع}{ن_س + ن_ص + ن_ع}$

$$= \frac{(\bar{س} \times ن_س) + (\bar{ص} \times ن_ص) + (\bar{ع} \times ن_ع)}{ن_س + ن_ص + ن_ع}$$

مثال: إذا كان لدينا الآتي:

الوسط الحسابي لامتحان ثلاثة طلاب هو (16)

الوسط الحسابي لامتحان (5) طلاب هو (14)

الوسط الحساب لامتحان (12) طالب هو (11)

أوجد الوسط الحسابي المرجّح لجميع الطلبة

المجموعة الأولى (س)	المجموعة الثانية (ص)	المجموعة الثالثة (ع)
$ن_س = 3$	$ن_ص = 5$	$ن_ع = 12$
$\bar{س} = \mathbf{16}$	$\bar{ص} = \mathbf{14}$	$\bar{ع} = \mathbf{11}$
$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن_س} \Leftrightarrow \frac{16}{1} = \frac{\sum س}{3}$	$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن_ص} \Leftrightarrow \frac{14}{1} = \frac{\sum ص}{5}$	$\bar{ع} = \frac{\sum ع}{ن_ع} \Leftrightarrow \frac{11}{1} = \frac{\sum ع}{12}$
$\sum س = 16 \times 3 = 48$	$\sum ص = 14 \times 5 = 70$	$\sum ع = 11 \times 12 = 132$

الوسط الحسابي المرجح = $\frac{\text{مجموع كل العلامات}}{\text{عدد جميع الطلبة}} = \frac{132 + 70 + 48}{12 + 5 + 3} = \frac{250}{20} = 12.5$

خصائص الوسط الحسابي

الخاصية الأولى: مجموع الانحرافات للقيم عن الوسط الحسابي يساوي (صفر)

∑(س − س̄) = صفر

الخاصية الثانية: الوسط الحسابي يتأثر بالقيم المتطّرفة

مثال : للقيم : 1 ، 2، 3، 4، 5، 105 أوجد الوسط الحسابي

$$\text{س̄} = \frac{1+2+3+4+5+105}{6} = \frac{120}{6} = 20$$

(لاحظ قيمة الوسط الحسابي = 20 وهي لا تتوسط القيم والسبب القيمة 105)

الخاصية الثالثة: مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط الحسابي أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم عن أي قمة أخرى.

مثال: للمفردات 1 ، 2، 3، 4، 5 لاحظ أن $\text{س̄} = \frac{1+2+3+4+5}{5} = 3$

س	الانحراف عن الوسط الحسابي س − س̄	مربع الانحراف عن الوسط الحسابي (س − س̄)²	الانحراف عن المشاهدة (6) س−6	(س − 6)²	الانحراف عن القيمة (2) (س−2)	(س−2)² مربع الانحراف عن القيمة (2)
1	1−3=−2	(−2)²=4	1−6=−5	25	1−2=−1	1
2	2−3=−1	(−1)²=1	2−6=−4	16	2−2=0	0
3	3−3=0	(0)²= 0	3−6=−3	9	3−2=1	1
4	4−3=1	(1)²=1	4−6=−2	4	4−2=2	4
5	5−3=2	(2)²=4	5−6=−1	1	5−2=3	9
المجموع	∑(س−س̄) = ∴	∑(س−س̄)²=10		55		15

لاحظ من الجدول : ∑(س−س̄)²=10 ، ∑(س−6)²=55، ∑(س−2)²=15

لاحظ أن مجموع مربعات انحرافات القيم عن الوسط (10) أقل من مجموع مربعات انحرافات القيم أي قيمة أخرى [55 ، 15].

الخاصية الرابعة: الوسط الحسابي يتأثر بالعمليات الحسابية الأربعة.

إذا كان هناك مجموعة من المفردات وكان وسطها الحسابي ($\overline{س}$) وقمنا بتعديل المفردات حسب العلاقة التالية ص = أس+ ب [بمعنى أن كل مفرده (س) عدّلت وذلك بضربها بالعدد (أ) ثم جمع العدد (ب) إلى ناتج الضرب] في هذه الحالة تصبح المفردات بعد التعديل لها وسط جديد ويكون دائماً الوسط الجديد (بعد التعديل) هو حاصل ضرب القديم ($\overline{س}$) في (أ) ثم جمع (ب) إلى الناتج أي أن :

$\overline{ص}$ = (أ × $\overline{س}$) + ب حيث : $\overline{ص}$: الوسط الحسابي بعد التعديل

$\overline{س}$: الوسط الحسابي قبل التعديل.

أ ، ب: أعداد حقيقية

وللتحقق من الخاصية الرابعة تابع المثال التالي:

المفردات الأصلية (س)	تعديل المفردات حسب العلاقة ص= 3س+5 المفردات بعد التعديل (ص)	الوسط الحسابي قبل التعديل $\overline{س}$	الوسط الحسابي بعد التعديل $\overline{ص}$
3، 2، 5، 1-، 1	تعديل (3) : (3×3)+5=14 تعديل (2) : (3×2)+5=11 تعديل (5) : (3×5)+5=20 تعديل (1-) : (3×1-)+5=2 تعديل (1) : (3×1)+5=8	$\frac{3+2+5+-1+1}{5}$ = 2 $\overline{س}$ = 2	$\frac{14+11+20+2+8}{5}$ = $\frac{55}{5}$ = 11 $\overline{ص}$ = 11

لاحظ العلاقة بين $\overline{س}$ =2، $\overline{ص}$ =11 [11 هي ناتج ضرب (2) في 3 ثم جمع (5) إلى الناتج.

أي أن $\overline{ص}$ = (3×$\overline{س}$) +5

مثال: إذا كان لدينا مفردات وسطها الحسابي (20) وتم تعديل المشاهدات بإضافة (6) لكل مشاهدة فما هو الوسط الحسابي الجديد.

الحل: $\bar{س}$ = 20، عملية التعديل = +6 إذن الوسط الجديد = الوسط القديم +6

$\bar{ص}$ = 20+6=26

مثال: مفردات وسطها الحسابي (12) إذا ضربت كل مفرده بالعدد (5) جد الوسط الجديد.

الحل: الوسط الجديد = 12×5= 60

مثال: مفردات وسطها الحسابي (10) عُدّلت المشاهدات حسب العلاقة ص = 5–2 س جد الوسط الحسابي بعد التعديل.

الحل: الوسط بعد التعديل = 5 – (2× الوسط قبل التعديل)

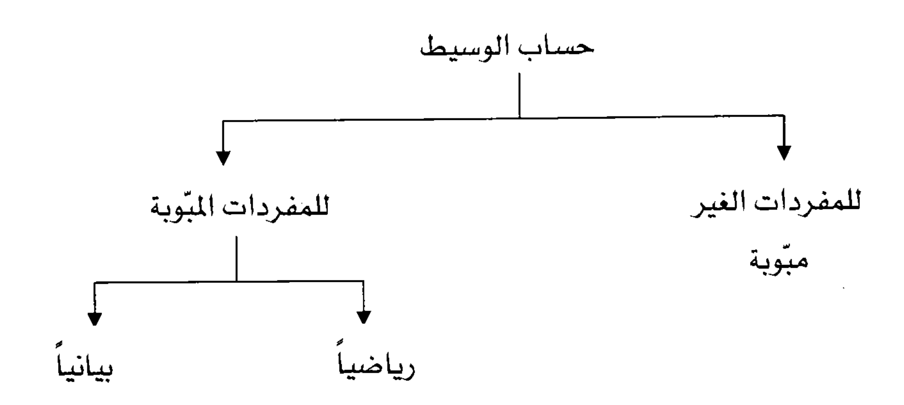
= 5– (10×2) = 5–20=$^-$15

مثال: مجموعة من القيم إذا علمت أن إحداهما (5) وتعديلها (11) وأخرى قيمتها(2) وتعديلها (5) بناء على ما سبق أكتب العلاقة الخطية التي جرى عليها التعديل [واجب].[الإجابة هي : ص = 2 س+ 1].

ثانياً: حساب الوسيط

وهو مقياس آخر من مقاييس النزعة المركزية ويمثل: المشاهدة التي تكون التكرارات التي تسبقها تساوي التكرارات التي تليها.

- أو: هو المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها (50٪) من التكرارات حيث أن رمز الوسيط هو (و).



حساب الوسيط للمفردات الغير مبّوبة

مثال: احسب الوسيط للمفردات التالية: 1، 7، 9، 16، 7، 10، 18

أولاً	ثانياً	ثالثاً
نجد ترتيب الوسيط حيث أن ترتيب الوسيط = $\frac{1}{2}$ × (ن+1) حيث ن: عدد المفردات =7 الترتيب = $\frac{1}{2}$ × (7+1)= 4 ترتيب الوسيط = المشاهدة الرابعة	نرتب المشاهدات تصاعدياً أو تنازلياً 1، 7، 7، 9، 10، 16، 18	ن ∍ فردي ← القيمة بالوسط ن زوجي ← الوسط الحسابي للقيمتين بالوسط في مثالنا ولأن عدد القيم فردي (7) إذن الوسيط هو المشاهدة الرابعة بعد الترتيب 1، 7، 7، 9، 10، 16، 18 ↓ الوسيط الوسيط = 9

مثال: أوجد الوسيط للمفردات : 4، 5، 6، 9، 12، 13، 16، 20

الحل: ترتيب الوسيط = $\frac{1}{2}$ × (ن +1) = $\frac{1}{2}$(8+1) = 4.5 (المشاهدة الرابعة والتي تليها).

نرتب تصاعدياً: 4، 5، 6، 9، 12، 13، 16، 20 [القيم مرتبة أصلاً]

$$10.5 = \frac{21}{2} = \frac{12+9}{2} = \text{الوسيط}$$

تمرين : احسب الوسيط للمفردات : 2، 7، 9، 11، 1، 0، 25، 17، 16، 41، 32

(الإجابة : الوسيط = 11)

حساب الوسيط للمفردات المبّوبة

أولاً: حساب الوسيط للمفردات المبّوبة بالطريقة الرياضية.

مثال: احسب الوسيط للجدول التكراري :

فئات	14–10	19–15	24–20	29–25	المجموع
تكرار	4	8	5	3	20

أولاً: نجد جدول التكرار الصاعد

الحدود الفعلية العليا	التكرار الصاعد
أقل من 9.5	صفر
أقل من 14.5	4
أقل من 19.5	12
أقل من 24.5	17
اقل من 29.5	20

ثانياً: رتبة الوسيط

الرتبة = $\frac{1}{2}$ × مجموع التكرارات

رتبة الوسيط = $\frac{1}{2} \times 20$

=10

ثالثاً: نحسب الوسيط

الوسيط : الحد الفعلي العلوي المقابل للتكرار الذي يحمل رتبة الوسيط.

لاحظ لا يوجد حد يقابله تكرار تراكمي قيمته (10)

الحد الفعلي العلوي	تكرار تراكمي
14.5	4
الوسيط = و	10
19.5	12

$$\frac{14.5-19.5}{14.5-و} = \frac{4-12}{4-10}$$

$$\frac{5}{14.5-و} = \frac{8}{6}$$

$$30 = 8(و-14.5)$$

$$\frac{30}{8} = و-14.5 \Leftrightarrow و = \frac{30}{8} + 14.5$$

$$و = 18.25$$

مثال (**2**): أوجد الوسيط للجدول التكراري :

فئات	14–10	19–15	24–20	29–25	المجموع
تكرار	4	8	9	3	24

أولاً : الجدول التكراري الصاعد

الحدود الفعلية العليا	التكرار الصاعد
أقل من 9.5	صفر
أقل من	4
أقل من	12
أقل من	21
اقل من	24

ثانياً : رتبة الوسيط

رتبة الوسيط = $\frac{1}{2}$ × مجموع التكرارات

رتبة الوسيط = $\frac{1}{2} \times 24 = 12$

ثالثاً : الوسيط

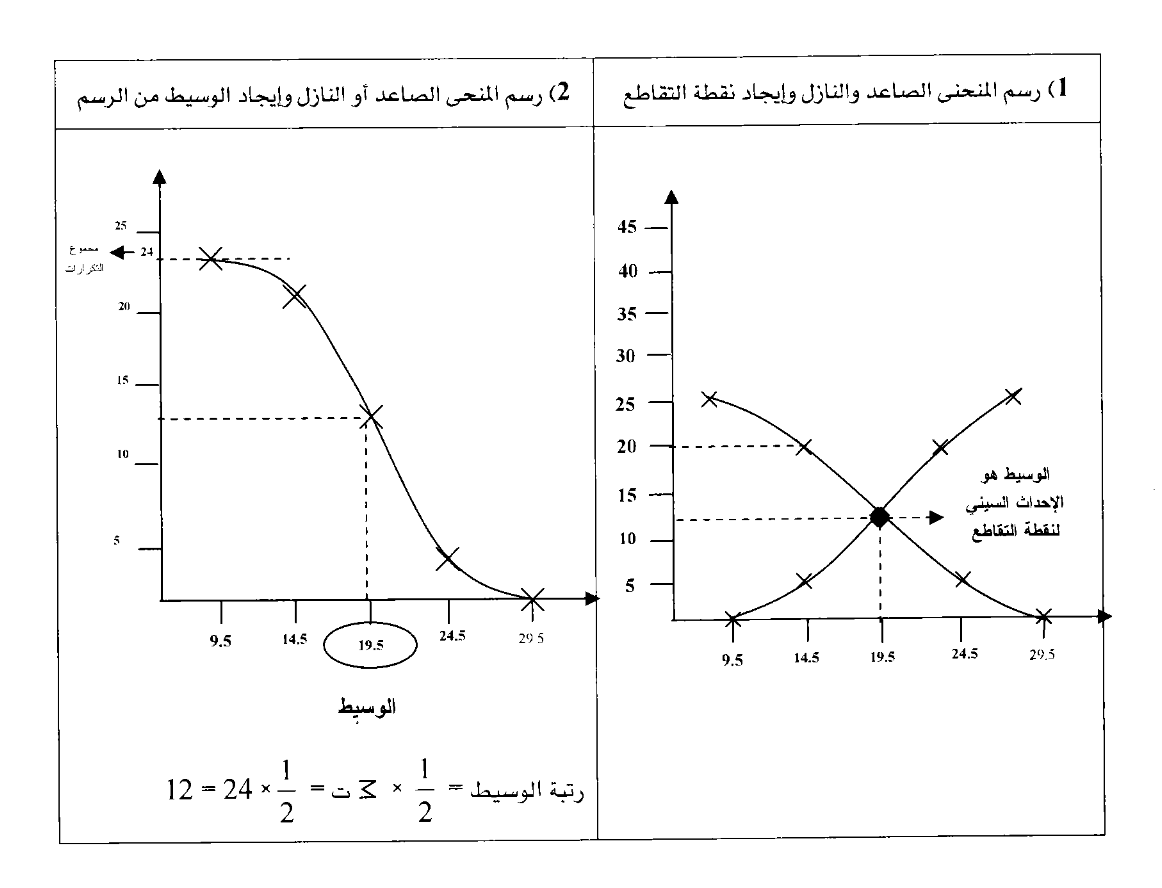
الوسيط : الحد الفعلي العلوي المقابل للتكرار التراكمي المساوي في القيمة (رتبة الوسيط) = 12

الحد الفعلي المقابل لـ 12 = 19.5

الوسيط = 19.5

الفئة الوسيطية = 19.5 –24.5

ثانياً: حساب الوسيط للمفردات المبّوبة بالطريقة البيانية.



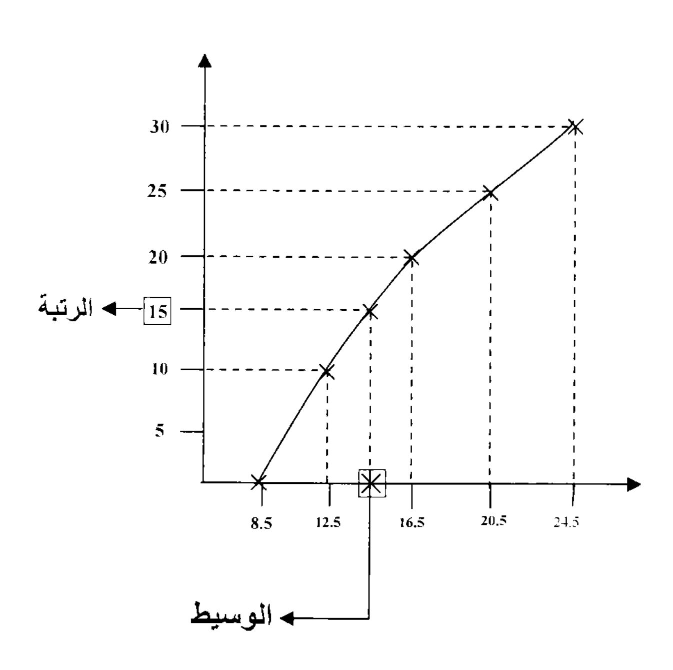
رتبة الوسيط = $\frac{1}{2} \times$ مج ت = $\frac{1}{2} \times 24 = 12$

مثال: الشكل المجاور يمثل توزيع تكراري ممثل بالمضلع الصاعد اعتمد عليه في إيجاد الفئة الوسيطية

الحل: رتبة الوسيط = $\frac{1}{2}$ × مجموع التكرارات

$= \frac{1}{2} \times 30 = 15$

الفئة الوسيطية : 16.5–12.5



ثالثاً: حساب المنوال

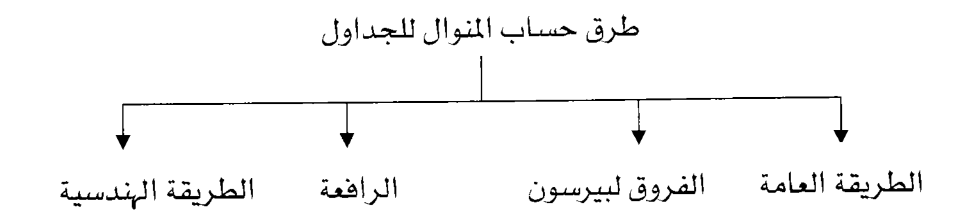
أولاً: حساب المنوال للمفردات الغير مبّوبة (م)

وهو المشاهدة الأكثر تكراراً ويمكن أن يكون للبيانات أكثر من منوال وإذا لم يكن هناك بيانات مكرّرة إذن لا يوجد منوال.

مثال: احسب المنوال لكل من المفردات التالية

1، 1، 2، 2، 3، 3، 4، 4	1، 2، 3، 4، 5، 5، 7	1، 1، 2،2، 4، 5	1، 2، 3، 4، 5
لاحظ أن كل مشاهدة مكررة مرتين وبالتالي لا يوجد قيمة مكررة أكثر من باقي المشاهدات لذا لا يوجد منوال	لاحظ أن (5) هي آكثر المشاهدات تكرارً إذن المنوال =5	لاحظ أن المشاهدات 1، 2 هي الأكثر تكراراً حيث تكررت كل منها مرتين إذن هناك منوالين للمفردات المنوال = 2،1	كل مشاهده تكررت مرة واحدة ولا يوجد مشاهدة تكررت أكثر من غيرها إذن لا يوجد منوال.

ثانياً: حساب المنوال للمفردات المبّوبة



مثال: احسب المنوال بكل من الطرق التالية للتوزيع التكراري التالي

فئات	20–24	25–29	30–34	35–39	40–44	المجموع
تكرار	7	9	20	8	6	50

أولاً: بالطريقة العامة.

ثانياً: بطريقة الفروق بيرسون.

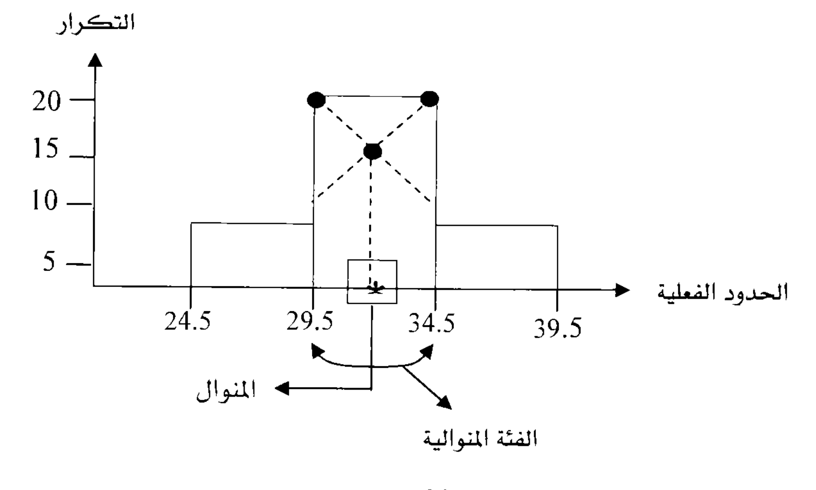
ثالثاً: بطريقة الرافعة.

رابعاً: بالطريقة الهندسية.

1) الطريقة العامة	2) طريقة الفروق لبيرسون	3) طريقة الرافعة
المنوال = مركز الفئة الأكبر تكرار المنوال = مركز الفئة 30– 34 $= \frac{34+30}{2} = 32$ المنوال = 32 الفئة المنوالية: الفئة التي تقابل أكبر تكرار = 30- 34	المنوال = الحد الأدنى الفعلي للفئة المنوالية+ ($\frac{ف1}{ف1+ف2}$ × طول فئة المنوال) الفئة المنوالية: 30- 34 طول الفئة المنوالية = 34 -30+1=5 الحد الأدنى الفعلي = 29.5 ف1 = الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة السابقة لها. ف1 = 20–9=11 ف2: الفرق بين تكرار الفئة المنوالية وتكرار الفئة اللاحقة لها. ف2 = 20–8=12 المنوال = 29.5+ ($\frac{11}{12+11}$ ×5) المنوال = 31.9 =32	المنوال = الحد الأدنى الفعلي للفئة المنوالية+ ($\frac{ك2}{ك1+ك2}$ × طول فئة المنوال) الفئة المنوالية: 30- 34 طول الفئة المنوالية = 34 -30+1=5 الحد الأدنى الفعلي = 29.5 ك1 = تكرار الفئة السابقة للفئة المنوالية. ك1 = 9 ك2+ تكرار الفئة اللاحقة للفئة المنوالية ك2=8 المنوال = 29.5+($\frac{8}{8+9}$ ×5) المنوال = 31.9 =32 المنوال = 32

4) بالطريقة الهندسية :

ويتم رسم المدرج التكراري ونمثل فيه الفئة المنوالية وما قبلها وما بعدها ونعين على الرسم .



العلاقة ما بين الوسط والوسيط والمنوال

1) في التوزيعات وحيدة المنوال لوحظ علاقة خطية تربط بين مقاييس النزعة المركزية وهي علاقة ليست دقيقة ولكنها تقريبية.

(الوسط الحسابي – المنوال) = 3 (الوسط الحسابي – الوسيط)

$(\overline{س} - م) = 3(\overline{س} - و)$

وبالكلمات : بعد الوسط عن المنوال ثلاثة أمثال بعد الوسط عن الوسيط.

في توزيع وحيد المنوال ملتوِ التواء بسيط كان الوسط = 30 وكان الوسيط = 28 أوجد المنوال	إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع أحاذي المنوال (50) وكان المنوال (م) = 40 جد الوسيط	إذا كان (م) لتوزيع أحادي المنوال (20) وكان الوسيط = 35 أوجد الوسط الحسابي $(\overline{س})$
$\overline{س} = 30$، و = 28، م=؟؟ $\overline{س} - م = 3(\overline{س} - و)$ 30- م = 3 (30- 28) 30- م = 6 ↔ م = 24	الوسيط = و = 46.6	الوسط = $\overline{س}$ = 42.5

2) جميع مقاييس النزعة المركزية تتأثر بالتحويلات الخطية:

فإذا عدّلت البيانات (س) وفق المعادلة ص = أس+ ب حيث ص : المشاهدة بعد التعديل، س = المشاهدة قبل التعديل، أ، ب ∋ ح فإن.

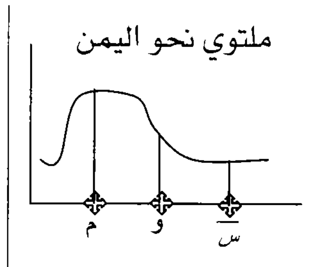
مقاييس النزعة المركزية بعد التعديل = (أ× مقايس النزعة قبل التعديل) +ب

مثال: مجموعة بيانات فيها ($\overline{س}$ = 20، و= 25، م=22) وعدلت قيم (س) لتصبح (ص) وفق المعادلة: ص = 2.5س + 5 أوجد كل من الوسط، الوسيط، المنوال بعد التعديل.

الوسط بعد التعديل ($\overline{ص}$)	الوسيط بعد التعديل ($\bar{و}$)	المنوال بعد التديل ($\bar{م}$)
$\overline{ص}$ = (أ× $\overline{س}$) + ب	$\bar{و}$ = (أ×و) + ب	$\bar{م}$ = (أ×م) +ب
$\overline{ص}$ = (20 ×2.5) +5	$\bar{و}$ + (25 × 2.5) + 5	$\bar{م}$ = (2.5 × 22) + 5
$\overline{ص}$ = 55	$\bar{و}$ = 67.5	$\bar{م}$ = 60

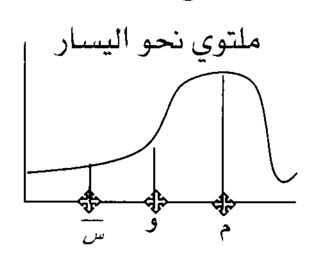
3) في التوزيعات أحادية المنوال ينتج

ملتوي نحو اليمن



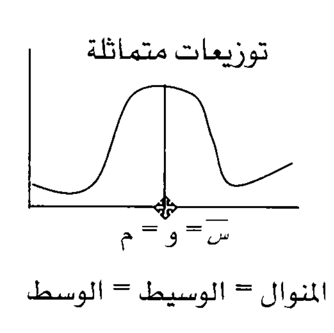
منوال ≥ وسيط ≥ وسط

ملتوي نحو اليسار



وسط ≥ وسيط ≥ منوال

توزيعات متماثلة



المنوال = الوسيط = الوسط

المئينات والرتب المئينية والعشيرات والربيعيات

أولاً: إيجاد الميئينات والعشيرات والربيعات والرتب المئينة للمشاهدات.

مثال: اعتمد على المفردات: 2، 7 ، 9 ، 11، 1، 0، 25، 17، 16، 32، 41 في الإجابة عن كل مما يلي.

أ- المئيتات.

- المئين (ك): المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها (ك٪) من التكرارات ونرمز له بالرمز مك امقياس يتم بموجبه تقسم البيانات إلى 100 جزء متساوية لذا يوجد (99) مئين (م 0 إلى م 99).

أوجد المئين (50) م5	أوجد المئين 65 = م65	أوجد المئين 20 = م20	أوجد م 85
م50 = المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها (50٪) من التكرارات 1) ارتب القيم تصاعدياً. 0، 1، 2، 7، 9، 11، 16، 17، 25، 32، 41 2) ترتيب الوسيط = $\frac{50}{100}$ (ن +1) = $\frac{50}{100}$ (ن+1) م50 = $\frac{50}{100}$ (11+1) م50 = 6 م 50 = المشاهدة السادسة بعد الترتيب م 50 = 11 م50 = الوسيط	م 65: المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها (65٪) من التكرارات = المشاهدة التي يزيد عنها 35٪ من المشاهدات م65 = $\frac{65}{100}$ × (عدد القيم+1) = $\frac{65}{100}$ × (ن+1) = $\frac{65}{100}$ × (11+1) م65 = 7.8 بين 7 ، 8 م65 = الوسط الحسابي للمشاهدة السابعة والثامنة بعد الترتيب م65 = $\frac{17+16}{2}$ = 16.5	الترتيب = $\frac{20}{100}$ (1+11) = 2و4 بين 2، 3 م20 = الوسط الحسابي للمشاهدة الثانية والثالثة م20 = $\frac{2+1}{2}$ م20 = 1.5	الترتيب = $\frac{85}{100}$ (1+11) = 2 و 10 م85 = وسط المشاهدة العاشرة والحادية عشر م85 = $\frac{41+32}{2}$ م 85 = 36.5

ب- العشيرات والربيعيات

العشيرات	الربيعيات
العشير (ل) : المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها ($\frac{ل}{10}$) من مجموع التكرارات = عل = م ل×10	الربيع الأول (ر1): المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها ($\frac{1}{4}$) مجموع التكرارات = الربيع الأدنى = م25
[العشير الأول وحتى العشير التاسع]	الربيع الأوسط (ر2): المشاهدة والتي يقل عنها أو يساويها ($\frac{1}{2}$) مجموع التكرارات = م50 = الوسيط
العشير (ل) = عل = م ل×10	الربيع الثالث (ر3) = الربيع الأعلى = المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها ($\frac{3}{4}$) مجموع التكرارات = م 75
مثال : العشر السادس = ع6 = م ل×10 = م60	
الوسيط = العشير الخامس = ع5 = الميئن50 = م 50	

تمرين ذاتي : اعتمد على المفردات التالية في إيجاد: 3، 5، 6،4،1،2 ، 0

أولاً: م40 ثانياً: العُشير السابع ثالثاً: الربيع الأدنى رابعاً: الربيع الأوسط = الوسيط خامساً: المشاهدة التي يزيد عنها 40٪ من المشاهدات.

سادساً: المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها ($\frac{8}{10}$) من مجموع التكرارات.

ثانياً: إيجاد المئينات والعشيرات والربيعات والرتب المئينة للمفردات المبّوبة.

مثال: اعتمد على الجدول التكراري التالي في إيجاد

فئات	20 – 24	25 – 29	30 – 34	35 – 39	40 – 44
تكرار	6	8	10	9	7

أوجد:

1) م20 2) العشير الخامس (ع5) 3) ع2

4) ع7 5) الربيع الأوسط 6) الربيع الأعلى

7) الرتبة المئينة للمشاهدة (27).

8) للرتبة المئينة للمشاهدة (32).

(1 $م_{20}$	(2 $ع_5$ = $م_{50}$ = الوسيط	(3 $ع_2$ = $م_{20}$
ترتيب $م_{20}$ = $\frac{20}{100}$ × مجموع التكرارات = $\frac{2}{10}$ × 40= 8 الحد الفعلي العلوي تكرار صاعد 24.5 6 $م_{20}$ 8 29.5 14 $\frac{24.5-29.5}{24.5-م_{20}} = \frac{6-14}{6-8}$ $\frac{5}{24.5-م_{20}}$ ⟷ $\frac{8}{2}$ $م_{20} - 24.5 = \frac{10}{8}$ $م_{20} = 24.5+\frac{10}{8}$ $م_{20}$ = 25.8 = 26	الوسيط = 32.5	$م_{20}$ = 26 (4 $ع_7$ = $م_{70}$ $ع_7$ = 36.7 = 37

6) الربيع الأعلى = م$_{75}$ = [الجواب: م$_{75}$ = 37.8 = 38] تمرين ذاتي

7) الرتبة المئينة للمشاهدة 27	8) الرتبة المئينة للمشاهدة 32
وهنا يكون المطلوب عكس المئين أي ما هو التكرار التراكمي المقابل للحد الفعلي العلوي 27 الحد الفعلي العلوي: 24.5 ، 27 ، 29.5 تكرار صاعد: 6 ، ت ، 14 $\frac{24.5-29.5}{24.5-27} = \frac{6-14}{6-ت}$ $\frac{5}{2.5} \quad \frac{8}{6-ت} \Longleftrightarrow ت-6 = \frac{2.5\times 8}{5}$ $ت-6=4 \Longleftrightarrow ت = 4+6 = 10$ التكرار التراكمي للمشاهدة 27 =10 الرتبة المئينة للمشاهدة = $\frac{\text{تكرار المشاهدة}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 100$ الرتبة المئينة لـ (27) = $\frac{10}{40}\times 100 = 25\%$ أي أن : 25٪ من المشاهدات أقل من أو تساوي (27). أي أن م$_{25}$ =27	والمطلوب: كم النسبة المئوية للمشاهدات التي تساوي أو أقل من المشاهدة 32 أو: الحد الفعلي العلوي: 29.5 ، 32 ، 34.5 تكرار صاعد: 14 ، ت ، 24 $\frac{29.5-34.5}{29.5-32} = \frac{14-24}{14-ت}$ $\frac{5}{2.5} \quad \frac{10}{14-ت}$ $ت-14 = \frac{10\times 2.5}{5}$ $ت-14 = 5$ $ت = 14+5 = 19$ التكرار التراكمي للمشاهدة 32 = 19 الرتبة المئينة للمشاهدة= $\frac{\text{تكرارها}}{\text{مجموع التكرارات}} \times 100$ الرتبة المئينة لـ (32) = $\frac{19}{40} \times 100$ = 47.5 ≈ 48٪ أي أن 48٪ من المشاهدات أقل من أو تساوي المشاهدة (32)

تمرين ذاتي : تالياً هي رواتب (60) عامل في مصنع موزعة كما يلي

فئات الرواتب	80- 89	90- 99	100- 109	110- 119	120- 129	مجموع
عدد العمال	6	14	20	13	7	**60**

أولاً: احسب النسبة المئوية من العمال الذين رواتبهم تقل عن أو تساوي (95).

ثانياً: الرتبة المئينة للراتب(109.5)

ثالثاً: الراتب الذي تقل عنه أن تساويه (30٪) من رواب العمال.

رابعاً: النسبة المئوية من العمال الذين رواتبهم تقل عن (100) دينار.

خامساً: النسبة المئوية من العمال الذين رواتبهم أكثر من (109) دنانير.

تمرين شامل على الفصل

تالياً هي علامات طلبة في إحدى المساقات الجامعية.

فئات	40- 50	50- 60	60- 70	70- 80	80- 90	90- 100
تكرار	4	9	10	13	8	6

أولاً: أوجد النسبة المئوية للعلامات الواقعة ما بين 70- 80

ثانياً: أوجد الرتبة المئينة للمشاهدة 85.

ثالثاً: جد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 50- 70

رابعاً: جد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 62- 75

خامساً: جد نسبة الطلاب الذين تتراوح علاماتهم بين 57- 84

سادساً: أوجد الوسط الحسابي بطرقه الثلاث.

سابعاً: أوجد الوسيط.

ثامناً: أوجد المنوال بطرقه الأربعة.

تاسعاً: أوجد ع7

عاشراً: أوجد الربيع الأعلى = ر3 بيانياً.

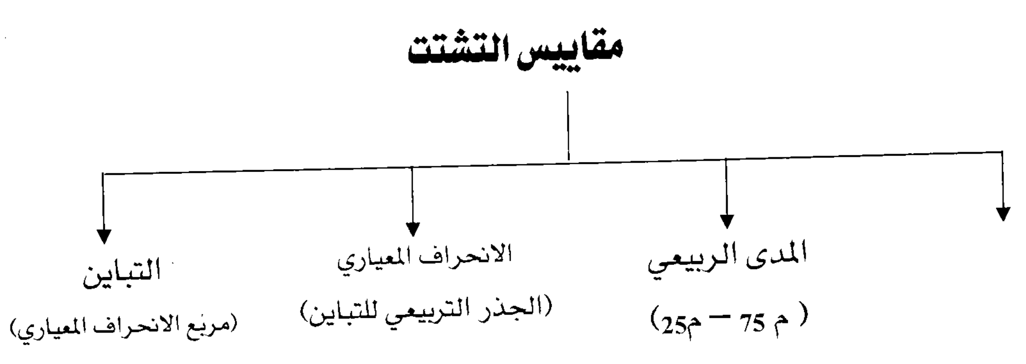
الوحدة الثالثة

مقاييس التشـــتت

محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
3– 1	المدى
3– 2	المدى الربيعي
3– 3	الانحراف المعياري
3– 4	التباين



مقاييس التشتت



تعريف مفهوم التشتت: إذا كانت مجموعة البيانات متباعدة أو متباينة عن بعضها يقال أنها مشتتة أما إذا كانت البيانات متجانسة وغير متباعدة فيقال أنها غير مشتتة.

ملاحظة: ربما تتساوى المتوسطات (الوسط الحسابي) لأكثر من مجموعة ولكن هذه المجموعات مختلفة كثيراً.

أولاً: حساب مقاييس التشتت للمفردات.

مثال : أوجد مقاييس التشتت للمفردات : 2، 9، 5، 4، 11، 16، 4، 5.

1- المدى = أكبر مشاهدة – أصغر مشاهدة = **16- 2= 14**

2- المدى الربيعي = الربيع الأعلى (ر**3**) – الربيع الأدنى (ر**1**)

حساب (ر3 = م75)

الرتبة = $\frac{75}{100}$ (ن+1)

= $\frac{75}{100}$ (8+1) = 6.75

بعد ترتيب المشاهدات تصاعدياً أو تنازلياً نكون ر3 : الوسط الحسابي للمشاهدة السادسة والسابعة

2، 4،4، 5،5، 9، 11، 16

م 75 = $\frac{9+11}{2}$ = 10

حساب (ر1) = م25

الرتبة = $\frac{25}{100}$ (8+1)

= 2.25

م 25 = $\frac{4+4}{2}$ = 4

المدى الربيعي = ر3 – ر1

= 10–4 = 6

نصف المدى الربيعي

= $\frac{ر3-ر1}{2}$

= $\frac{6}{2}$ = 3

3- التباين للمفردات : وهناك قانونان يستخدمان لحساب التباين للمفردات:

1) تستخدم عندما تكون المشاهدات كبيره

$$\text{التباين} = \frac{\sum (\text{س} - \bar{\text{س}})^2}{\text{ن}}$$

حيث : ن: عدد المشاهدات

س: المشاهدة

$\bar{\text{س}}$: الوسط الحسابي للمفردات

$$= \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \frac{\text{مجموع القيم}}{\text{عددها}}$$

أولاً: نجد $\bar{\text{س}} = \left[\frac{16+11+9+5+5+4+4+2}{8}\right]$

$\bar{\text{س}} = 7$

س	س - $\bar{\text{س}}$	$(\text{س} - \bar{\text{س}})^2$
2	5 -	25
4	3 -	9
4	3 -	9
5	2 -	4
5	2 -	4
9	2	4
11	4	16
16	9	81
	صفر	152

$$\text{التباين} = \frac{152}{8} = 19$$

2) تستخدم عندما تكون المشاهدات صغيرة

(يمكن تربيع كل قيمة وإيجاد مجموع التربيع)

$$\text{التباين} = \frac{\sum \text{س}}{\text{ن}} - (\bar{\text{س}})^2$$

س	س^2	
2	4	
4	16	
4	16	
5	25	
5	25	
9	81	
11	121	
16	256	
مجموع	544	

$$\text{التباين} = \frac{544}{8} - (7)^9$$

$$= 68 - 49 = 19$$

4- الانحراف المعياري = الجذر التربيعي للتباين = $\sqrt{19} = 4.35$

ثانياً : حساب مقاييس التشتت للجداول التكرارية

مثال : أوجد مقاييس التشتت للجدول التكراري التالي

فئات	22- 26	27- 31	32- 36	37- 41	42- 46	47- 51
تكرار	9	3	10	8	12	8

أولاً : حساب المدى (3قوانين)

1) المدى =

الحد الأعلى للفئة الأخيرة – الحد الأدنى للفئة الأولى

$= 51 - 22 = 29$

2) المدى =

الحد الأعلى الفعلي للفئة الأخيرة – الحد الأدنى الفعلي للفئة الأولى.

$= 51.5 - 21.5 = 31$

3) المدى =

مركز الفئة الأخيرة – مركز الفئة الأولى

$= 49 - 24 = 25$

ثانياً : حساب المدى الربيعي

المدى الربيعي = م75 – م25 = (ر3 - ر1)

حساب م 75

الرتبة = $\frac{75}{100} \times$ مجـ ت

$= \frac{75}{100} \times 50 = 37.5$

30 ← 41.5

37.5 ← م75

42 ← 46.5

$$\frac{41.5 - 46.5}{41.5 - م75} = \frac{30 - 42}{30 - 37.5}$$

$$\frac{5}{41.5 - م_{75}} = \frac{12}{7.5}$$

$$م_{75} - 41.5 = \frac{37.5}{12}$$

$$م_{75} = \frac{37.5}{12} + 41.5$$

$$م_{75} = 44.6$$

حساب م25

الرتبة = $\frac{25}{100} \times$ مجـ ت

$\frac{25}{100} \times 50$

= 12.5

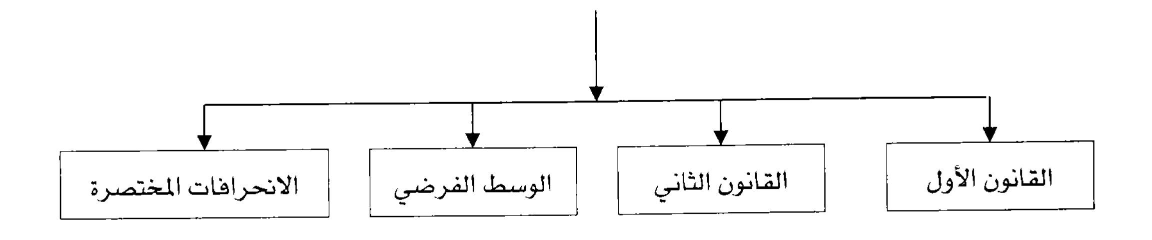
(أكمل الحمل

عزيزي الطالب)

م25=

المدى الربيعي = م75– م25=

ثالثاً : حساب التباين للجداول التكرارية وهناك أربع طرق [التباين والانحراف المعياري].



1) التباين بالقانون الأول

$$\text{التباين} = \frac{\sum (س - \bar{س})^2 \times ت}{\sum ت}$$

س : مركز الفئة

$$\bar{س} = \frac{\sum س \times ت}{\sum ت} \quad \text{(وسط للجداول)}$$

$$\bar{س} = \frac{1875}{50} = 37.5$$

س	ت	س×ت	س−س̄	(س−س̄)²	(س−س̄)² × ت
24	9	216	13.5 -	182.25	1640.25
29	3	87	8.5 -	72.25	216.75
34	10	340	3.5 -	12.25	122.5
39	8	312	1.5	2.25	18
44	12	528	6.5	42.25	507
49	8	392	11.5	132.25	158
مجموع	50	1875	-	-	3562.5

$$\text{التباين} = \frac{3562.5}{50} = 71.25$$

2) التباين بالقانون الثاني

$$\text{التباين} = \frac{\sum س^2 \times ت}{\sum ت} - (\bar{س})^2$$

$$\text{حيث } \bar{س} = \frac{\sum (س \times ت)}{\sum ت}$$

$$\bar{س} = 37.5$$

س	ت	س²	س² × ت
24	9	576	5184
29	3	841	2523
34	10	1156	11560
39	8	1521	12168
44	12	1936	23232
49	8	2401	19208
مجموع	50	-	73875

$$\text{التباين} = \frac{73875}{50} - (37.5)^2$$

$$= 1477.5 - 1406.25 = 71.25$$

3) التباين بالوسط الفرضي

$$\text{التباين} = \frac{\sum (ح^2 \times ت)}{\sum ت} - \left(\frac{\sum (ح \times ت)}{\sum ت}\right)^2$$

ح = س − ف = مركز الفئة − وسط فرضي

لنفرض أن ف = 24

س	ت	ح=س−ف	ح2	ح×ت	ح2×ت
24	9	صفر	0	0	0
29	3	5	25	15	75
34	10	10	100	100	1000
39	8	15	225	120	1800
44	12	20	400	240	4800
49	8	25	625	200	5000
مجموع	50			675	12675

$$\text{التباين} = \frac{\sum ح^2 \times ت}{\sum ت} - \left(\frac{\sum (ح \times ت)}{\sum ت}\right)^2$$

$$= \frac{12675}{50} - \left(\frac{675}{50}\right)^2$$

$$= 253.5 - 182.25 = 71.25$$

4) التباين بالانحرافات المختصرة

$$\text{التباين} = \left(\frac{\sum ح'^2 \times ت}{\sum ت} - \left(\frac{\sum ح' \times ت}{\sum ت}\right)^2\right) \times ل^2$$

ح = س − ف حيث ف: وسط فرضي

ل = طول الفئة = 29 − 24 = 5

$$ح' = \frac{ح}{ل}$$

لنفرض أن ف = 24 ، ل² = (5)² = 25

س	ت	ح	ح'	ح'×ت	ح'2	ح'2×ت
24	9	صفر	0	0	0	0
29	3	5	1	3	1	3
34	10	10	2	20	4	40
39	8	15	3	24	9	72
44	12	20	4	48	16	192
49	8	25	5	40	25	200
مجموع	50			135		507

$$\text{التباين} = \left(\frac{507}{50} - \left(\frac{135}{50}\right)^2\right) \times 25 = 71.25$$

رابعاً: حساب الانحراف المعياري بنفس الطرق الأربعة مع العلم.

أن الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{71.25} \approx 8.4$

تمرين شامل : احسب مقاييس التشتت للجدول التالي (تمرين ذاتي)

فئات	5- 9	10- 14	15- 19	20- 24	25- 29	30- 34
تكرار	2	5	6	2	4	1

أولاً: احسب المدى ثانياً: احسب المدى الربيعي (الجواب 12)

ثالثاً: أوجد الانحراف المعياري (العادية، القانون الثاني، الوسط الفرضي، انحرافات مختصرة) [الجواب : δ = الانحراف المعياري = 7]

أسئلة سريعة على القوانين

1) جدول تكراري فيه التباين = (49) والوسط الحسابي (18) إذا علمت أن مجموع التكرارات يساوي (20) فجد مجموع حواصل ضرب مربع مراكز الفئات بالتكرارات	2) بيانات مفردة تباينها (25) وعدد حدودها (10) ووسطها الحسابي (15) أوجد مجموع مربعات الحدود
الحل: التباين = 49 $\bar{س} = 18$ $\sum ت = 20$ نوع البيانات = جدول تكراري المطلوب = $\frac{\sum (س^2 \times ت)}{\sum ت}$ بما أن التباين = $\frac{\sum (س^2 \times ت)}{\sum ت} - (\bar{س})^2$ قانون $49 = \frac{\sum (س^2 \times ت)}{20} - (18)^2$ $49 + (18)^2 = \frac{\sum (س^2 \times ت)}{20}$ $\frac{373}{1} = \frac{\sum س^2 \times ت}{20}$ $\sum (س^2 \times ت) = 373 \times 20$ $= 7460$	الحل : نوع البيانات : مفردة التباين = 25 عدد الحدود = ن = 10 $\bar{س} = 15$ المطلوب = $\sum س^2$ الحل التباين = $\frac{\sum س^2}{ن} - (\bar{س})^2$ $25 = \frac{\sum س^2}{10} - (15)^2$ $25 + (15)^2 = \frac{\sum س^2}{10}$ $\frac{250}{1} = \frac{\sum س^2}{10}$ $\sum س^2 = 250 \times 10$ $\sum س^2 = 2500$

خصائص مقاييس التشتت

1) مقاييس التشتت لا تتأثر بالجمع والطرح وتتأثر بالضرب والقسمة (الضرب والقسمة بالموجب)

قاعدة: [توضيح **1**]

أ- إذا ضربت المشاهدات في القيمة (أ) فإن مقاييس التشتت تتغير وذلك بضرب كل منها بـ $|أ|$ [القيمة المطلقة للعدد أ]

ب- إذا قسمت كل مشاهدة على القيمة (أ) فإن مقاييس التشتت تتغير وذلك بقسمة كل منها على $|أ|$ [القيمة المطلقة للعدد أ].

ج- إذا جمع أو طرح من كل مشاهدة قيمة فإن هذا لا يغير من قيمة مقاييس التشتت للمفردات بعد التعديل.

د- التباين وحده يتأثر بمربع العدد المضروب أو المقسوم .

التباين الجديد = التباين القديم × $(العدد)^2$

1) مشاهدات انحرافها المعياري (6) أضفنا (5) إلى كل مشاهدة احسب الانحراف المعياري الجديد والتباين	2) مشاهدات انحرافها المعياري (9) ضربنا كل مشاهدة بالعدد (5) أوجد الانحراف المعياري والتباين الجديد.
الانحراف القديم = 6 بما أن التعديل إضافة إذن لن يتأثر الانحراف الجديد الانحراف الجديد= القديم = 6	الحل : الإنحراف الجديد = القديم ×5 = $9\times5 = 45$ التباين القديم = (الإنحراف القديم)^2 = $(9)^2 = 81$ التباين الجديد = $81\times(5)^2 = 2025$
3) مشاهدات، التباين لها (81) أثرنا على المشاهدات بضرب جميع البيانات بالعدد (-5) ما هو التباين الجديد	4) مفردات انحرافها المعياري (4) أثرنا على المفردات حسب العلاقة: ص = -5 +9س جد الانحراف الجديد.
	العلاقة: الضرب في (9) ثم جمع (-5) تؤثر لا تؤثر الانحراف الجديد = القديم × 9 = 4×9 = 36
التباين الجديد = القديم × $(\lvert-5\rvert)^2$ = 81×25 = 2025	ملاحظة : الانحراف المعياري دائماً موجب.
5) بيانات المدى الربيعي لها (6) أثرنا على البيانات بالعلاقة ص = -2 س + 5 جد المدى الربيعي الجديد. المدى الربيعي الجديد=	

تمارين الفصل

1) إليك المفردات : 6، 7، 9، 10، 11، 12، 13، 14، 18، 25

أولاً : أوجد الانحراف المعياري باستخدام وسط فرضي.

ثانياً : احسب نصف المدى الربعي.

ثالثاً : احسب المدى.

رابعاً : احسب التباين باستخدام القانون الأول.

2) مجموعة من المشاهدات عدلت حسب العلاقة ص= 3–2س

حيث ص : المشاهدة بعد التعديل.

س: المشاهدة قبل التعديل.

إذا علمت أن الانحراف المعياري قبل التعديل = 9

فجد التباين بعد التعديل.

3) اعتمد على الجدول التكراري التالي في إيجاد

فئات	1–3	4–6	7–9
تكرار	3	6	1

أولاً : أوجد المدى.

ثانياً : جد المدى الربعي.

ثالثاً : أحسب الانحراف المعياري بوسط فرضي مقداره (5).

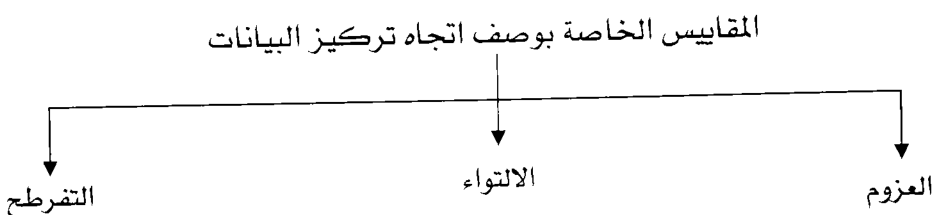
الوحدة الرابعة

مقاييس التفرطح والالتواء

محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
4– 1	العزوم
4– 2	التفرطح
4– 3	الالتواء

مقاييس التفرطح والالتواء

وتستخدم لقياس إتجاه تركيز البيانات [وصف لاتجاه تركيز البيانات]



أولاً : العزوم

(أ) الغرم الواوي حول الوسط الحسابي ($م_و$)

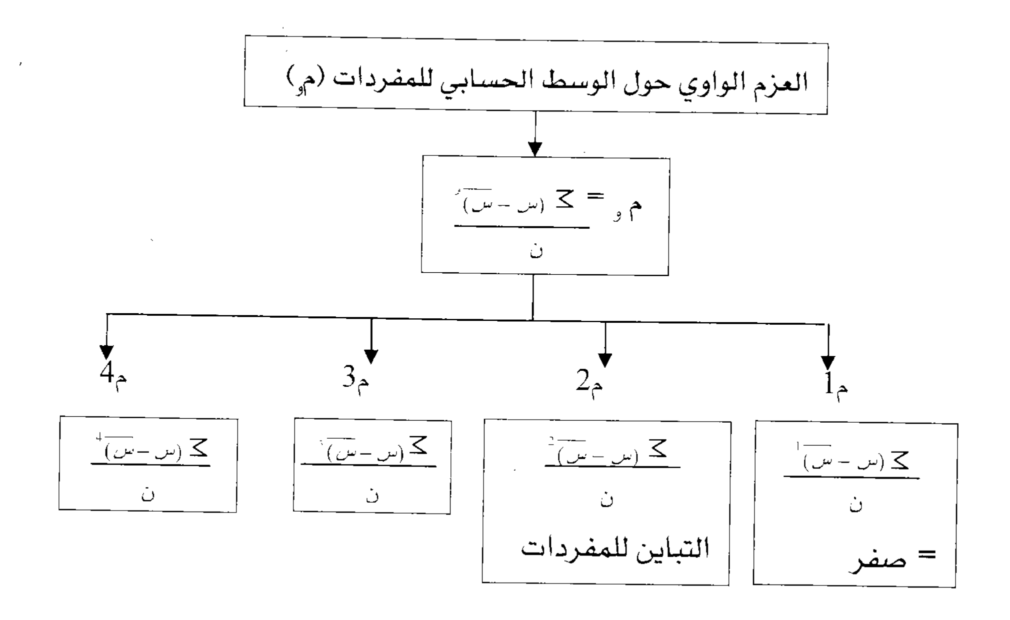
$م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$ ، $م_4$

(ب) الغرم الواوي حول الصفر ($\overline{س}$ = صفر) ($\overline{م}_و$)

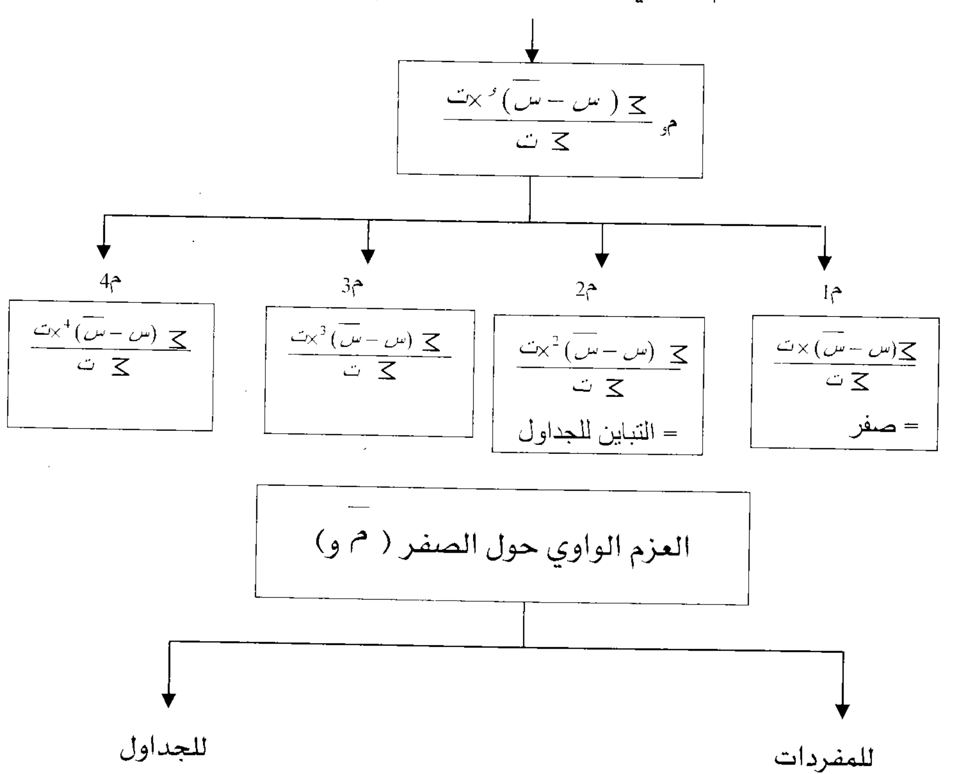
$\overline{م}_1$ ، $\overline{م}_2$ ، $\overline{م}_3$ ، $\overline{م}_4$

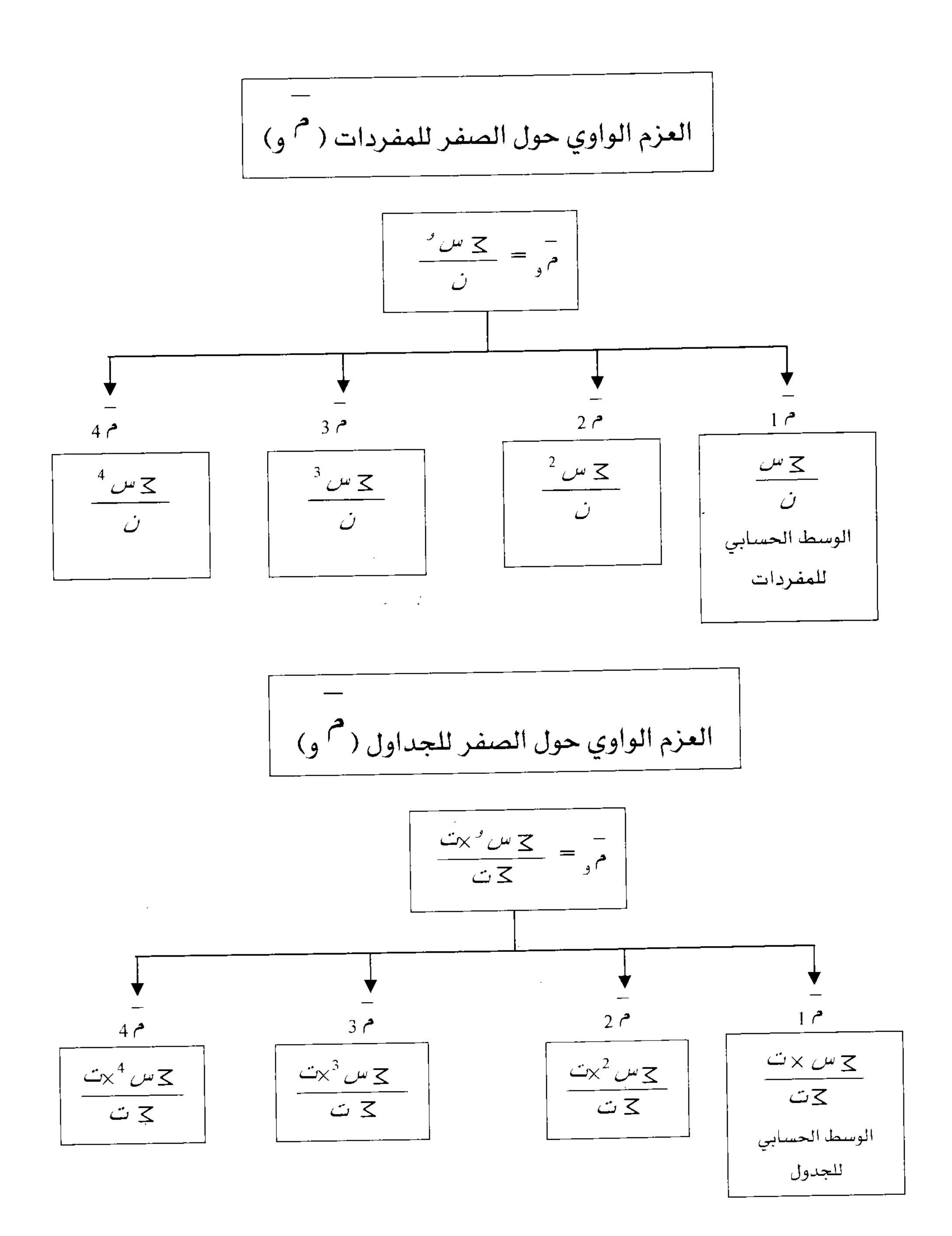
العزم الواوي حول الوسط الحسابي ($م_و$)

- للمفردات
- للجداول



العزم الواوي حول الوسط الحسابي للجداول





العزم الواوي حول الصفر للمفردات ($\bar{م}_و$)
$\bar{م}_و = \frac{\sum س^و}{ن}$
$\bar{م}_1$
$\frac{\sum س}{ن}$
الوسط الحسابي للمفردات
$\bar{م}_2$
$\frac{\sum س^2}{ن}$
$\bar{م}_3$
$\frac{\sum س^3}{ن}$
$\bar{م}_4$
$\frac{\sum س^4}{ن}$
العزم الواوي حول الصفر للجداول ($\bar{م}_و$)
$\bar{م}_و = \frac{\sum س^و \times ت}{\sum ت}$
$\bar{م}_1$
$\frac{\sum س \times ت}{\sum ت}$
الوسط الحسابي للجدول
$\bar{م}_2$
$\frac{\sum س^2 \times ت}{\sum ت}$
$\bar{م}_3$
$\frac{\sum س^3 \times ت}{\sum ت}$
$\bar{م}_4$
$\frac{\sum س^4 \times ت}{\sum ت}$

تمرين شامل على المفردات

إليك المفردات: 2، 3، 4، 5، 6 أوجد

1) $م_1$، $م_2$ ، $م_3$، $م_4$، $\bar{م}_1$، $\bar{م}_2$، $\bar{م}_3$، $\bar{م}_4$

2) أثبت أن $م_2 = \bar{م}_2 - (\bar{م}_1)^2$

الإجابات	$م_1$ = ∴ ، $م_2$ = 2، $م_3$ = صفر، $م_4$= 6.8، $\bar{م}_1$=4، $\bar{م}_2$= 18، $\bar{م}_3$=88 $\bar{م}_4 = \frac{2274}{5}$

الوسط الحسابي= $\bar{س} = \bar{م}_1 = \frac{\sum س}{ن} = \frac{6+5+4+3+2}{5} = 4$

لإيجاد : $\bar{م}_2$، $\bar{م}_3$، $\bar{م}_4$

س	$س^2$	$س^3$	$س^4$	حساب $\bar{م}_2$، $\bar{م}_3$، $\bar{م}_4$
2	4	8	16	$\bar{م}_1 = \frac{\sum س}{ن} = \frac{20}{5} = 4$
3	9	27	81	$\bar{م}_2 = \frac{\sum س^2}{ن} = \frac{90}{5} = 18$
4	16	64	256	$\bar{م}_3 = \frac{\sum س^3}{ن} = \frac{440}{5} = 88$
5	25	125	625	$\bar{م}_4 = \frac{\sum س^4}{ن} = \frac{2274}{5} = 454.8$
6	36	216	1296	
$\sum$=20	90	440	2274	

لإيجاد $م_1$ ، $م_2$، $م_3$، $م_4$

$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{20}{5} = 4$

س	$س - \bar{س}$	$(س - \bar{س})^2$	$(س - \bar{س})^3$	$(س - \bar{س})^4$	حساب $\bar{م}_2$، $\bar{م}_3$، $\bar{م}_4$
2	2-	4	8-	16	$\bar{م}_1 = \frac{\sum(س - \bar{س})}{ن} = \frac{0}{5} =$ صفر
3	1-	1	1-	1	
4	صفر	صفر	صفر	صفر	$\bar{م}_2 = \frac{\sum(س - \bar{س})^2}{ن} = \frac{10}{5} = 2$
5	1	1	1	1	$\bar{م}_3 = \frac{\sum(س - \bar{س})^3}{ن} = \frac{0}{5} = 0$
6	2	4	8	16	
$\sum س = 20$	صفر	10	صفر	34	$\bar{م}_4 = \frac{\sum(س - \bar{س})^4}{ن} = \frac{34}{5} = 6.8$

تمرين شامل على الجداول

مثال: أوجد $\bar{م}_1$ ، $\bar{م}_2$، $\bar{م}_3$، $\bar{م}_4$، $م_1$ ، $م_2$ ، $م_3$، $م_4$ للجدول التالي

وأثبت أن : - $م_2 = \bar{م}_2 - (\bar{م}_1)^2$

فئات	3- 5	6- 8	9- 11	12- 14	15- 17	18- 20
تكرار	2	3	6	6	8	5

لإيجاد: $\bar{م}_1$، $\bar{م}_2$، $\bar{م}_3$، $\bar{م}_4$.

فئات	ت	س	س×ت	$س^2$	$س^2$×ت	$س^3$	$س^3$×ت	$س^4$	$س^4$×ت
3- 5	2	4	8	16	32	64	128		
6- 8	3	7	21	49	147	343	1029		
9- 11	6	10	60	100	600	1000	6000		
12- 14	6	13	78	169	1014	2197	13182		
15- 17	8	16	128	256	2048	4096	32768		
18- 20	5	19	95	361	1805	6859	34295		
مجموع	30		390		5646		87402		

$$\bar{م}_1 = \frac{\sum س \times ت}{\sum ت} = \frac{390}{30} = 13$$

$$\bar{م}_2 = \frac{\sum س^2 \times ت}{\sum ت} = \frac{5646}{30} = 188.2$$

$$\bar{م}_3 = \frac{\sum س^3 \times ت}{\sum ت} = \frac{87402}{30} = 2913.4$$

$$\bar{م}_4 = \frac{\sum س^4 \times ت}{\sum ت} = \text{صفر}$$

لإيجاد $م_1$، $م_2$، $م_3$، $م_4$

$\bar{س} = \bar{م}_1 = 13$ [أوجدناها في الصفحة السابقة].

س	ت	س−$\bar{س}$	(س−$\bar{س}$)×ت	$(س-\bar{س})^2$	$(س-\bar{س})^2$×ت	$(س-\bar{س})^3$	$(س-\bar{س})^3$×ت
4	2	9-	18 -	81	162	729 -	1458-
7	3	6-	18 -	36	108	216 -	648 -
10	6	3 -	18 -	9	54	27 -	126 -
13	6	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر	صفر
16	8	3	24	9	72	27	216
19	5	6	30	36	180	216	1080
مجموع	30		صفر		576		972-

$م_1 = \frac{\sum (س - \bar{س}) \times ت}{\sum ت} = \frac{صفر}{30} = صفر$

$م_2 = \frac{\sum (س - \bar{س})^2 \times ت}{\sum ت} = \frac{576}{30} = 19.2$

$م_3 = \frac{\sum (س - \bar{س})^3 \times ت}{\sum ت} = \frac{-972}{30} = -32.4$

$م_4 = \frac{\sum (س - \bar{س})^4 \times ت}{\sum ت} =$ (واجب) [$م_4 = 934.9$]

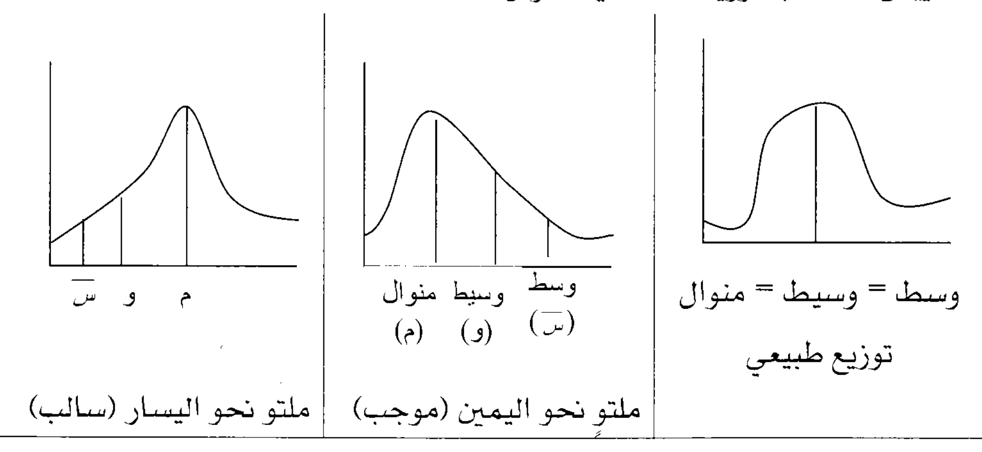
للمطلوب الثاني : أثبت أن $م_2 = \bar{م}_2 - (\bar{م}_1)^2$

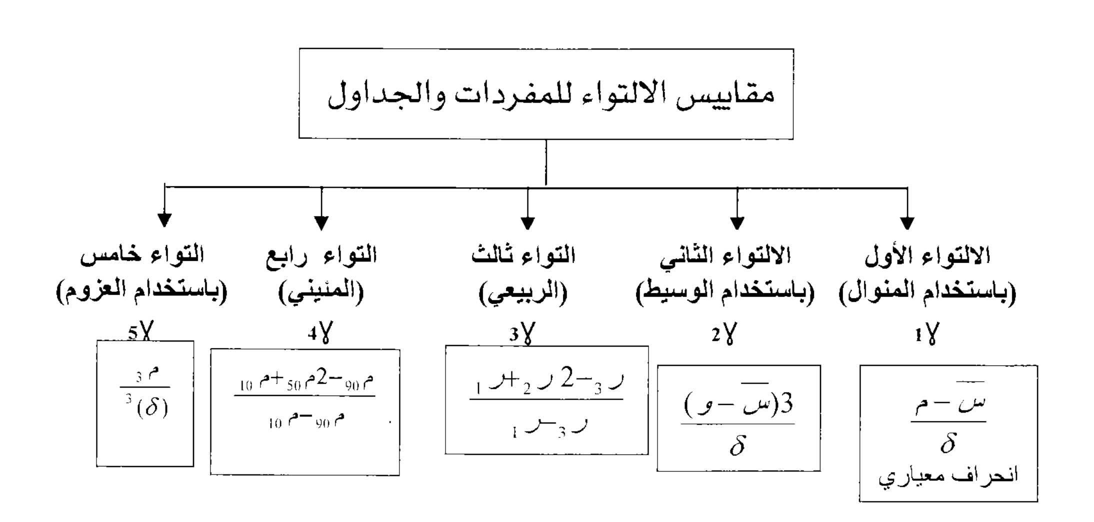
$19.2 = 188.2 - (13)^2$

$= 188.2 - 169$

مقاييس الالتواء

وهو انحراف منحنى التوزيع عن التماثل (التواء موجب ، سالب، معتدل) وهي مقاييس خاصة بالتوزيعات أحادية المنوال.





إذا كان ناتج معامل الالتواء مهما كان نوعه موجب ← نوع الالتواء لليمين.

إذا كان ناتج معامل الالتواء مهما كان نوعه سالب ← نوع الالتواء لليسار..

مثال : للجدول التالي أوجد : γ_1، γ_2، γ_3، γ_4، γ_5

فئات	3- 5	6- 8	9- 11	12- 14	15- 17	18- 20
تكرار	2	3	6	6	8	5

الإجابات: $\gamma_1 = -0.70$ / $\gamma_2 = -0.34$ / $\gamma_3 = -0.1$ / $\gamma_4 = -0.15$

الحل : نحتاج لكل من $\bar{س}$ ، م، δ وقد قمنا سابقاً بالعزوم بإيجاد ما يلي (لنفس الجدول)

$م_2$ = التباين = 19.2 ومنه يكون الانحراف المعياري = δ = $\sqrt{19.2} = 4.38$

$\bar{م}_1$ = الوسط الحسابي للجداول = 13 = $\bar{س}$

المنوال = م = 16 = مركز الفئة الأكبر تكرار

$$\gamma_1 = \frac{\bar{س} - م}{\delta} = \frac{13 - 16}{4.38} = -0.68 \approx -0.70$$

$$\gamma_2 = \frac{3(\bar{س} - و)}{\delta} = \frac{3(13 - و)}{4.38}$$ نحتاج للوسيط = $م_{50}$ للجداول

ترتيب الوسيط = $\frac{1}{2} \times$ مجـ ت = $\frac{1}{2} \times 30 = 15$

11.5 ، س ، 14.5 — 11 ، 15 ، 17	$\frac{14.5 - 11.5}{س - 11.5} = \frac{7 - 11}{15 - 11} \Leftrightarrow$ س = و = $م_{50}$ = $ر_2$ = 13.5

إذن $\gamma_2 = \frac{3(13 - 13.5)}{4.38} = -0.34$

لإيجاد $\gamma_3 = \frac{ر_3 - 2ر_2 + ر_1}{ر_3 - ر_1}$	
$ر_3 = م_{75} = 16.56$ $ر_2 = م_{50} = 13.5$ $ر_1 = م_{25} = 9.75$	$\gamma_3 = \frac{16.56 - (2 \times 13.5) + 9.75}{16.56 - 9.75}$ $\gamma_3 = -0.1$
قم بحساب ر1 ، ر2، ر3 كما تعلمت سابقاً	

لإيجاد $\gamma_4 = \frac{م_{90} - 2م_{50} + م_{10}}{م_{90} - م_{10}}$	$\gamma_4 = \frac{6.5 + (13.5 \times 2) - 18.7}{6.5 - 18.7}$ $\gamma_4 = -0.15$
$م_{90} = 18.7$	
$م_{50} =$ و $= 13.5$	
$م_{10} = 6.5$	

$\gamma_5 = \frac{م_3}{(\delta)^3}$ وفي السابق نتج أن $م_3 = \frac{-32.4}{(4.38)^3}$

مثال : للمفردات التالية: 6،5،4،3،2 أوجد γ_1، γ_2، γ_3، γ_4، γ_5

مقاييس التفرطح

قياس درجة علو قمة التوزيع بالنسبة للتوزيع الطبيعي (α)

معامل التفرطح المئيني

$\frac{1}{2} \times (\frac{ر_3 - ر_1}{م_{90} - م_{10}})$

$\frac{1}{2} \times (\frac{م_{75} - م_{25}}{م_{90} - م_{10}})$

معامل التفرطح العزومي

$\frac{م_4}{(\delta)^4} = \frac{م_4}{(م_2)^2}$

$= \frac{\text{العزم الرابع حول الوسط}}{(\text{التباين})^2}$

لاحظ أن $\delta^2 = م_2 =$ التباين

إذا كان معامل التفرطح = 3 ← معتدل التفرطح (**α=3**)

إذا كان (α 〉3) ← مفرطح

إذا كان (α 〈3) ← مدبب

مثال : للجدول التالي أوجد معامل التفرطح المئيني والغرومي

فئات	3- 5	6- 8	9- 11	12- 14	15- 17	18- 20
تكرار	2	3	6	6	8	5

الإجابات: معامل التفرطح المئيني = 0.275 / معامل التفرطح الغرومي = 2.54

الحل: أوجدنا سابقاً للجدول التالي ما يلي:

م90 = 18.7 / م10 = 6.5

م75= 16.56 / م25 = 9.75

δ = 4.38 / التباين = 19.2

م4= 934.9

معامل التفرطح المئيني

$$= \frac{1}{2} \times (\frac{9.75 - 16.56}{6.5 - 18.7})$$

= 0.275 [مفرطح]

معامل التفرطح الغرومي

$$= \frac{934.9}{(4.38)^4}$$

= 2.54 [مفرطح]

مثال: للمفردات: 2، 3، 4، 6،5 جد معامل التفرطح المئيني والعزومي [تمرين ذاتي]

[الإجابة لمعامل التفرطح العزومي = 1.7]

تمارين الفصل الرابع

السؤال الأول:

فئات	10- 14	15- 19	20- 24	25- 29	30- 34
تكرار	2	4	8	4	2

أوجد : م50، م25، ر3، م90، م10 ، معامل التفرطح المئيني، معامل التفرطح الغرومي ، معامل الالتواء الربيعي، معامل الالتواء المئيني، معامل الالتواء باستخدام الوسيط.

الحلول: م50= 22/ م75= 25.75/ م25= 18.25 / م90=29.5/ م10=14.5/ التباين =30/

السؤال الثاني: للمفردات : 1، 3، 2، 5، 4، 6، 7، 9، 8

أوجد :

1) العزم الأول والثاني والثالث والرابع حول الصفر.

2) أوجد العزوم الأربعة الأولى حول الوسط الحسابي.

3) أثبت أن $م_2 = \bar{م}_2 - (\bar{م}_1)^2$

الحلول:

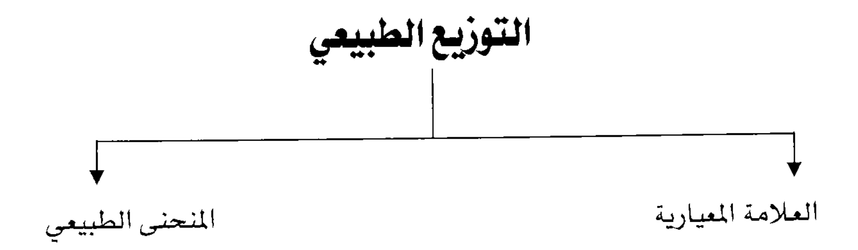
$\bar{م}_1 = 5$ / $\bar{م}_2 = 31.66$ / $\bar{م}_3 = 225$

$م_1 = ∴$ / $م_2 = 6.66$ / $م_4 = 50.33$

الوحدة الخامسة

التوزيع الطبيعي





أولاً: العلامة المعيارية:

تعريفها: عدد الانحرافات المعيارية التي تنحرفها مشاهدة معينة فوق أو تحت الوسط الحسابي ويرمز لها بالرمز (ع)

استخداماتها: للمقارنة بين قيمتين (مشاهدتين) مختلفتين كل منها ينتمي إلى مجموعة معينة. فلا نكتفي بالمقارنة المطلقة وإنما يجب أخذ متوسطات المجموعة التي تنتمي إليها القيمة وانحرافها المعياري حيث أن

$$\text{العلامة المعيارية} = \text{ع} = \frac{\text{العلامة} - \text{المتوسط}}{\text{الانحراف المعياري}} = \frac{\text{س} - \bar{\text{س}}}{\delta}$$

كلما كانت العلامة المعيارية أكبر كان المستوى أفضل

ع= +3 (المشاهدة فوق الوسط بثلاث انحرافات معيارية)

ع = - 5 (المشاهدة تحت الوسط بـ 5 انحرافات).

مثال للتوضيح: حصل طالب على علامة (75) في مادة الإحصاء وكان متوسط علامة الصف (60) والانحراف المعياري (15)، نفس الطالب حصل على علامة (70) في مادة الرياضيات وكان متوسط علامة الصف (49) و الانحراف المعياري (7) أي العلامتين أفضل.

الإحصاء (س)

$س = 75$

$\overline{س} = 60$

$\delta_{س} = 15$

$ع_{س} = \frac{س - \overline{س}}{\delta} = \frac{75 - 60}{15} = 1$

أي أن علامة الطالب فوق الوسط الحسابي بمقدار انحراف معياري واحد

توضيح للعلاقة ما بين س، $\overline{س}$ ، $\delta_{س}$ ، $ع_{س}$

$ع_{س}$ = عدد الانحرافات = +1 (للأعلى)

$\delta_{س}$ = مقدار الانحراف = 15

العلامة = س = الوسط + مقدار الانحرافات

$75 = 60 + 15$

الرياضيات (ص)

$ص = 70$

$\overline{ص} = 49$

$\delta_{ص} = 7$

$ع_{ص} = \frac{ص - \overline{ص}}{\delta} = \frac{70 - 49}{7} = 3$

أي أن علامة الطالب تزيد عن الوسط الحسابي بمقدار (3) انحرافات معيارية

توضيح للعلاقة ما بين ص، $\overline{ص}$ ، $\delta_{ص}$ ، $ع_{ص}$

$ع_{ص}$ = عدد الانحرافات = +3 (للأعلى)

$\delta_{ص}$ = مقدار الانحراف الواحد = 7

العلامة = ص = الوسط + مقدار الانحرافات

$70 = 49 + 21$

علامته بالرياضيات أفضل من علاقته في الإحصاء

لأن $ع_{ص} > ع_{س}$

أمثلة متنوعة

1) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (40) طالب يساوي (60) والانحراف المعياري (8) أوجد المشاهدة التي تنحرف انحرافين معياريين فوق الوسط الحسابي والمشاهدة التي تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي

$\overline{س} = 60$، $\delta = 8$

ع = +2 ، س = ؟؟

$ع = \frac{س - \overline{س}}{\delta}$

$2 = \frac{س - 60}{8} \Leftrightarrow 16 = س - 60$

س = 76

$\overline{س} = 60$، $\delta = 8$

ع = -2 ، س = ؟؟

$ع = \frac{س - \overline{س}}{\delta}$

$-2 = \frac{س - 60}{8} \Leftrightarrow -16 = س - 60$

س = 44

2) إذا كان الوسط الحسابي لعلامات (40) طالب يساوي (60) وكانت إحدى المشاهدات تساوي (44) وعلمت أنها تنحرف انحرافين معياريين تحت الوسط الحسابي جد الانحراف المعياري.

$\overline{س} = 60$، س = 44، ع = - 2

أوجد : δ

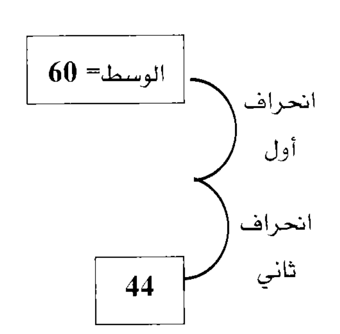
$ع = \frac{س - \overline{س}}{\delta}$

$-2 = \frac{44 - 60}{\delta} \Leftrightarrow -2\delta = 44 - 60$

$-2\delta = -16$

$\delta = 8$

طريقة أخرى للحل



عدد الانحرافات = -2 (تحت الوسط)

مقدار الانحراف= δ

الوسط – مجموع الانحرافات = 44

$60 - 2\delta = 44 \Longleftrightarrow$ **$\delta = 8$**

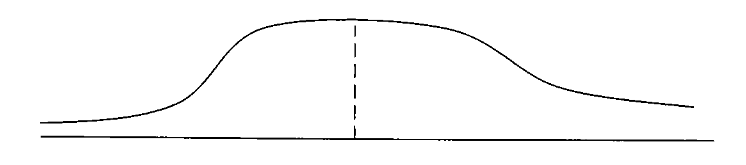
نتيجة	الوسط الحسابي للعلامات المعيارية يساوي (صفر) والانحراف المعياري للعلامات المعيارية يساوي (1)

ثانياً: المنحى الطبيعي

من النماذج النظرية لمنحنيات التوزيعات الاحتمالية منحنى التوزيع الطبيعي المعياري وهو منحنى يمثل الاقتران التالي:

ق(ص) = $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ × (هـ)$^{-\frac{1}{2}ص^2}$ حيث هـ : العدد النيبيري = 2.72 ، $\pi = \frac{22}{7} = 3.14$

عند رسم هذا الاقتران فإنه يأخذ الشكل التالي



وسط = وسيط = منوال

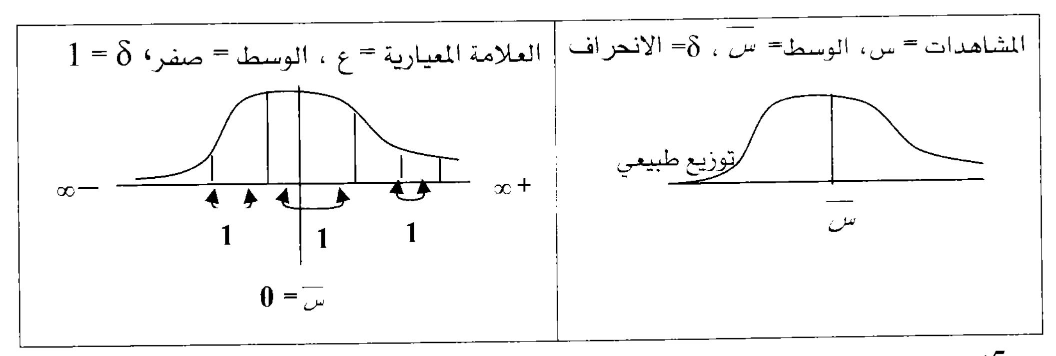
خصائص الشكل

1) يكون على شكل ناقوص متماثل حول الوسط محور أو الوسيط أو المنوال ويمتد من طرفيه إلى + ∞ ، −∞ (لا يقطع محور السينات)

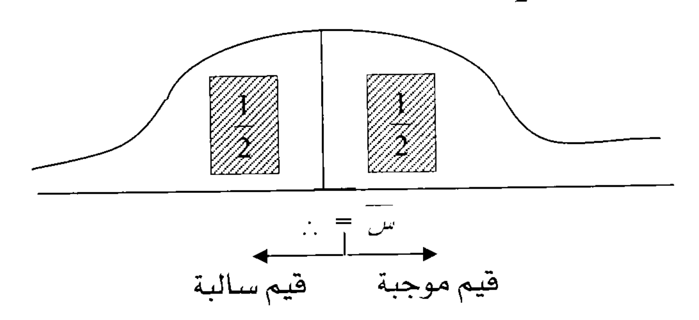
2) الوسط الحسابي = الوسيط = المنوال

3) التوزيع الطبيعي المعياري هو الذي وسطه الحسابي (صفر) والانحراف المعياري (1) [تحويل المشاهدات لعلامات معيارية وتمثيلها بمنحنى معياري].

4) تمثل المشاهدات بمنحنى طبيعي ويسمى توزيع طبيعي وسطه ($\bar{س}$) وانحرافه المعياري (δ) ويمكن تحويله إلى توزيع طبيعي معياري بإيجاد العلامة المعيارية لكل مشاهدة من المشاهدات وتمثيلها بما يسمى بمنحنى طبيعي معياري .



5) المساحة تحت المنحى الطبيعي المعياري تساوي (1) موزعة على طرفين أيمن وأيسر وكل طرف يمثل ($\frac{1}{2}$).

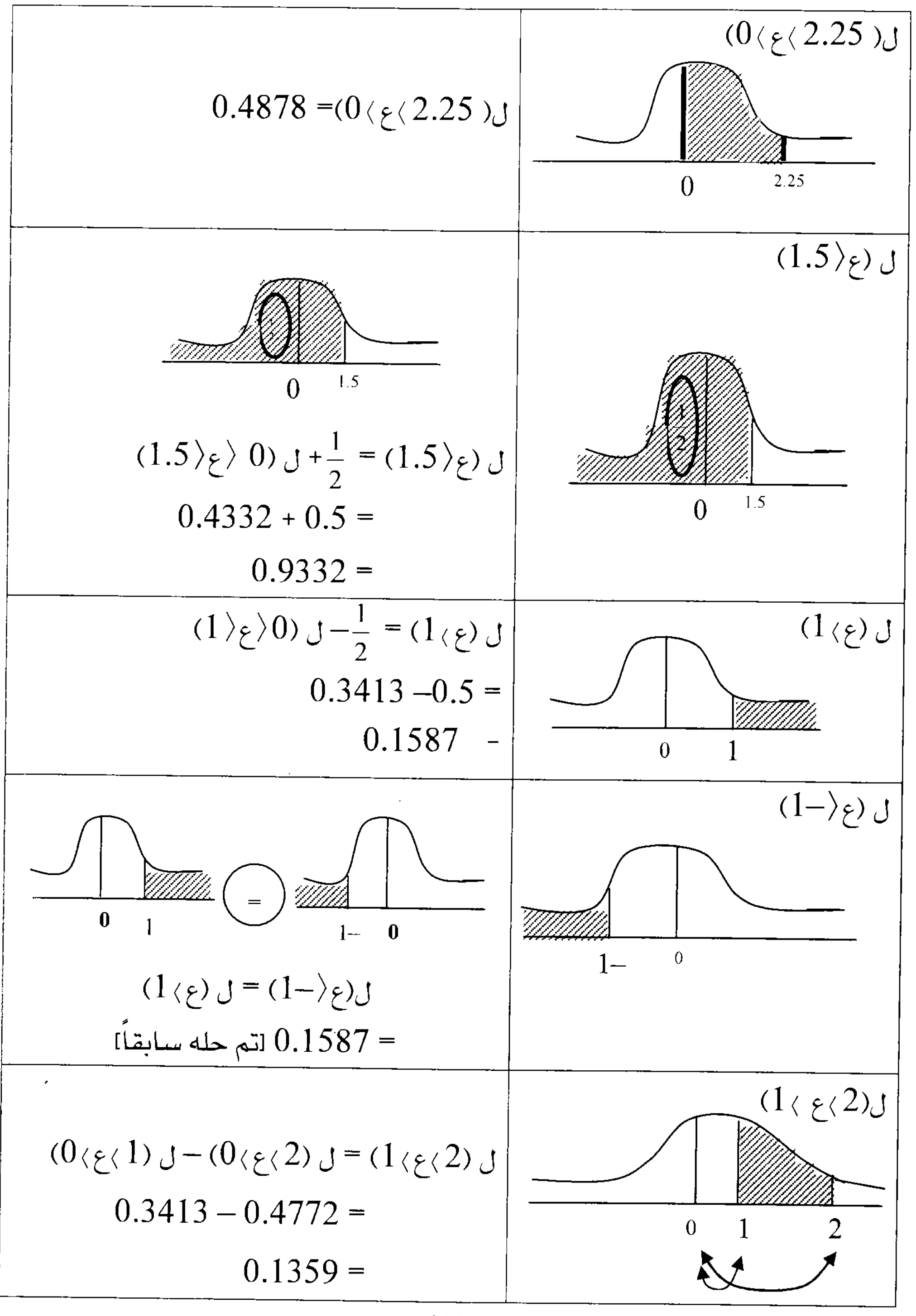


كيفية إيجاد المساحة تحت المنحنى الطبيعي المعياري

الحالة	طريقة الحل
1) حساب المساحة الواقعة بين ع= ∴ وأي قيمة موجبة. صفر أ	ل (أ 〈 ع 〈 0) يستخدم لإيجادها جداول خاصة تسمى جداول التوزيع المعياري تعطى المساحة
2) حساب المساحة المحصورة بين علامتين معياريتين في أي مكان تحت المنحنى 0 أ ب ل (ب〈ع〈أ) هـ أ 0 ل (أ 〈 ع 〈 هـ) أ 0 ب ل (أ〈ع〈ب) أ 0 ل (أ〈ع〈0)	وفي كل هذه الحالات يتم حسابها من الجداول لكن بطريقة غير مباشرة سنتعلمها لاحقاً وذلك من خلال التعبير عن كل منها بدلالة (المساحة الواقعة بين (ع= ∴) و أي قيمة موجبة والتي تقوم الجداول بحسابها فقط.

مثال : استخدم جداول المنحنى الطبيعي المعياري لحساب المساحة المظللة في كل مما يلي:

المسألة	الحل
	$ل (0 < ع < 1) = 0.3413$ (من الجداول مباشرة)
$ل (صفر < ع < 1.5)$	$ل (∴ < ع < 1.5) = 0.4332$
$ل (صفر < ع < 3.02)$	0.4987
$ل (ع < 2)$	$ل (ع < 2) = ل (0 < ع < 2) + \frac{1}{2}$ $= 0.4772 + 0.5$ $= 0.9772$ المساحة تحت العلامة المعيارية (2) = 0.9772
$ل (ع < -2)$	$ل (ع < -2) = ل (ع > 2)$ $ل (ع > 2) = \frac{1}{2} - ل (0 < ع < 2)$ $= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$



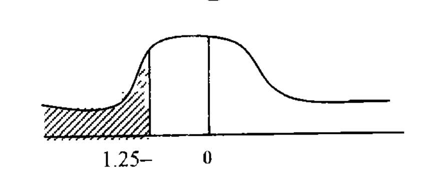
ل(2.25 〈ع〈 0)	ل(2.25 〈ع〈 0)= 0.4878
ل (ع〉1.5)	ل (ع〉1.5) = $\frac{1}{2}$ + ل (0 〈ع〉 1.5) 0.4332 + 0.5 = 0.9332 =
ل (ع〈 1)	ل (ع〈 1) = $\frac{1}{2}$ − ل (0〈ع〉1) 0.3413 −0.5 = 0.1587 -
ل (ع〉−1)	ل(ع〉−1) = ل (ع〈 1) = 0.1587 [تم حله سابقاً]
ل(2〈 ع〈 1)	ل (2〈ع〈 1) = ل (2〈ع〈0) − ل (1〈ع〈0) 0.3413 − 0.4772 = 0.1359 =

ل (ع⟩3) ، ل (ع ⟨ 3)	ل (ع⟩ 3) = $\frac{1}{2}$ − ل (0⟩ ع⟩ 3) = 0.5 − 0.4987 = 0.0013 ل (ع⟨ 3) = ل (0⟩ ع⟩ 3) + $\frac{1}{2}$ = 0.4987 +0.5 = 0.9987
ل (ع⟨−1.25)	ل(ع ⟨ −1.25) = ل (ع ⟩ 1.25) = $\frac{1}{2}$ − ل (0⟩ع⟩1.25) = $\frac{1}{2}$ − 0.3944= 0.1056

مثال : مثلت علامات (10000) طالب توزيعاً طبيعياً تم حساب العلامات المعيارية لهم ومثلت على توزيع طبيعي معياري بناء على ما سبق أوجد عدد الطلبة الذين تقل علامتهم المعيارية عن (−1.25).

الحل = عدد الطلبة = المساحة ل(ع⟨−1.25)× العدد الكلي للطلاب ؟ (تحتاج لحل)

لإيجاد ل (ع⟨−1.25)



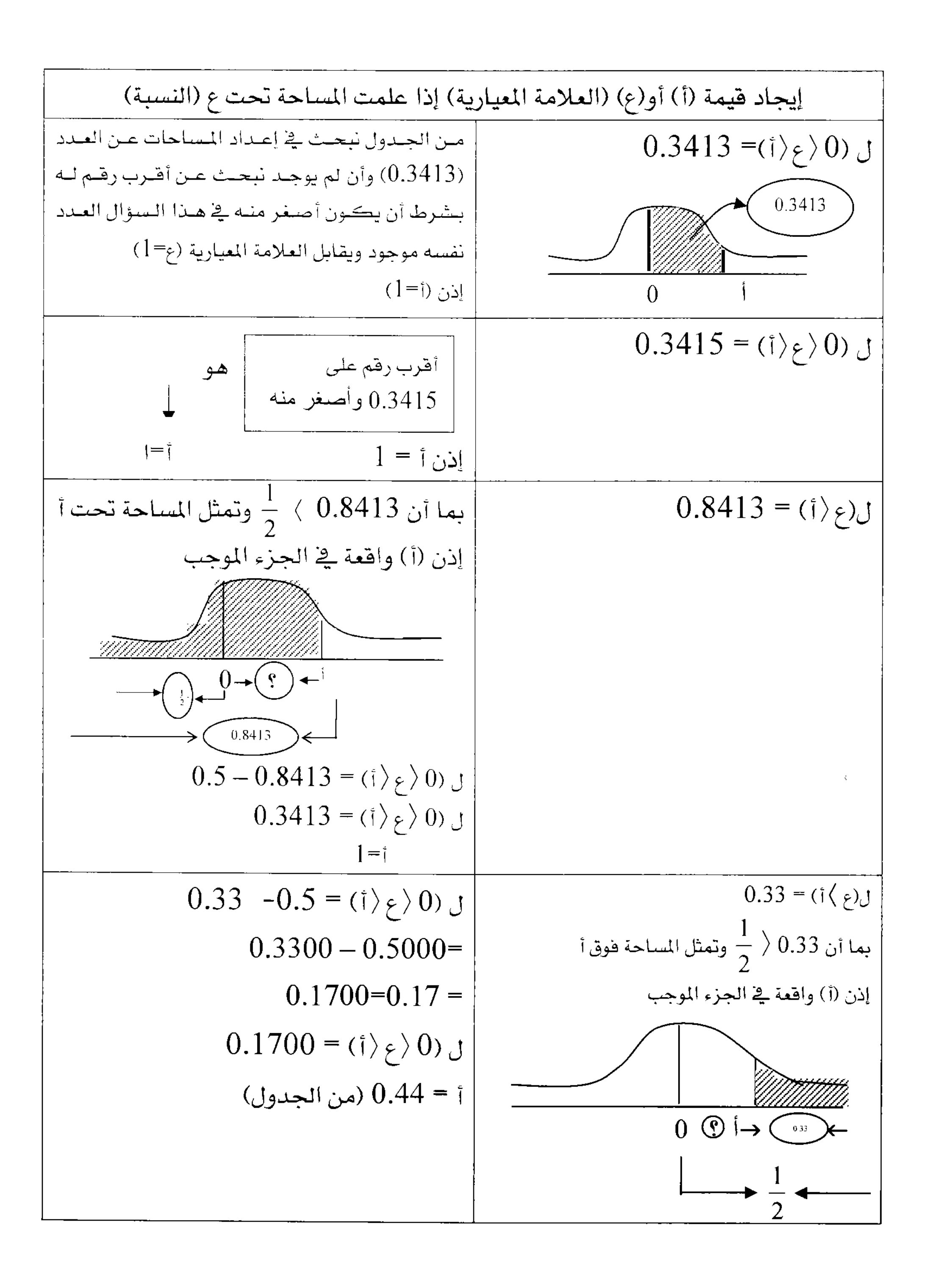
ل (ع⟨−1.25) = ل (ع ⟩ 1.25)

= $\frac{1}{2}$ − ل (0⟩ع⟩1.25)

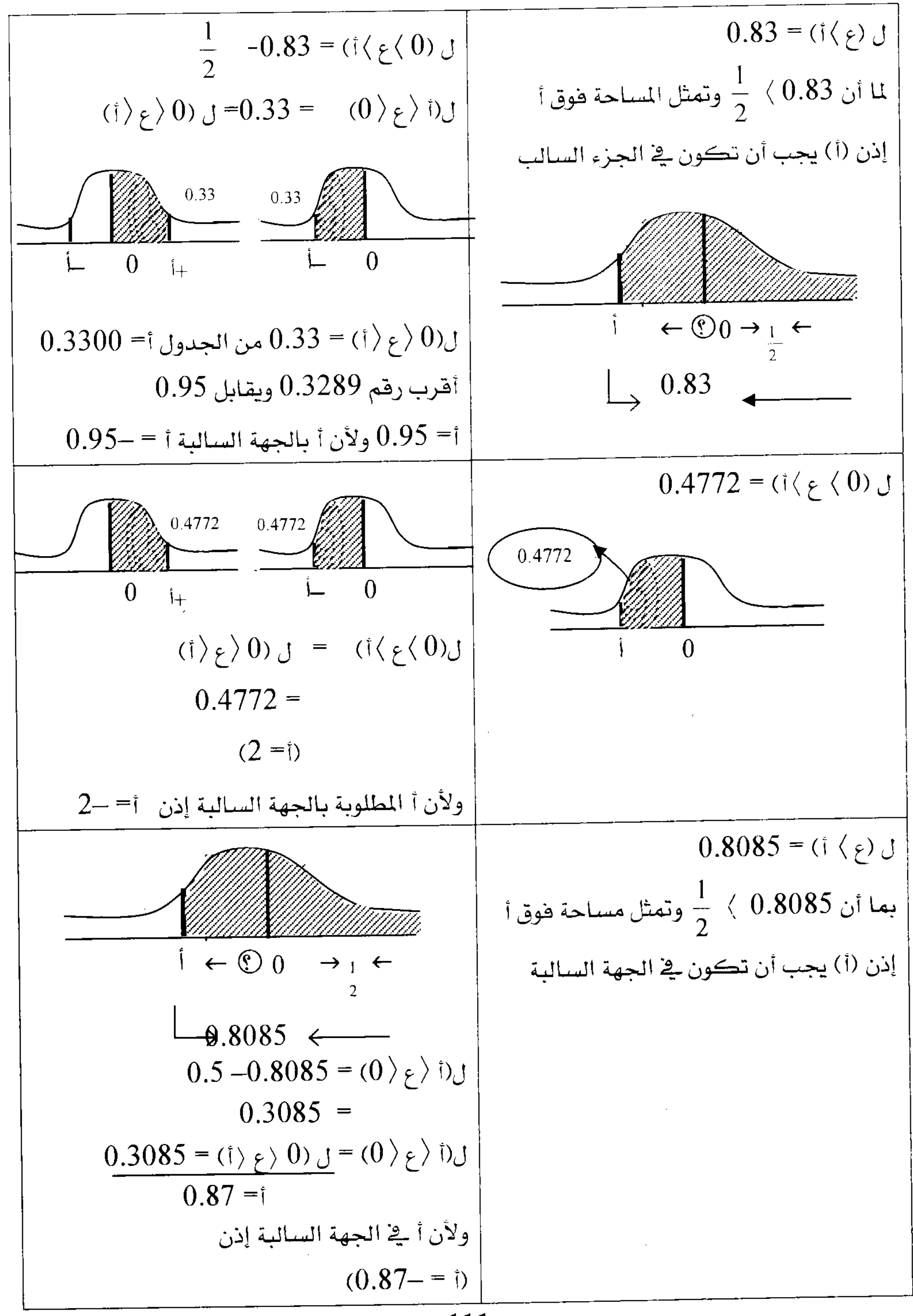
= 0.5 − 0.3944=0.1056

عدد الطلبة = 0.1056× 10000= $\frac{1056}{10000}$ × 10000= 1056

عدد الطلبة الذين تقل علامتهم المعيارية عن −1.25 = 1056 طالب



إيجاد قيمة (أ) أو(ع) (العلامة المعيارية) إذا علمت المساحة تحت ع (النسبة)	
ل (0 〈 ع 〈 أ) = 0.3413 0.3413 0 أ	من الجدول نبحث في إعداد المساحات عن العدد (0.3413) وأن لم يوجد نبحث عن أقرب رقم له بشرط أن يكون أصغر منه في هذا السؤال العدد نفسه موجود ويقابل العلامة المعيارية (ع=1) إذن (أ=1)
ل (0 〈 ع 〈 أ) = 0.3415	أقرب رقم على 0.3415 وأصغر منه هو أ=1 إذن أ = 1
ل(ع 〈 أ) = 0.8413	بما أن 0.8413 〉 $\frac{1}{2}$ وتمثل المساحة تحت أ إذن (أ) واقعة في الجزء الموجب 0 ؟ أ $\frac{1}{2}$ 0.8413 ل (0 〈 ع 〈 أ) = 0.8413 – 0.5 ل (0 〈 ع 〈 أ) = 0.3413 أ=1
ل(ع 〈 أ) = 0.33 بما أن 0.33 〉 $\frac{1}{2}$ وتمثل المساحة فوق أ إذن (أ) واقعة في الجزء الموجب 0 ؟ أ 0.33 $\frac{1}{2}$	ل (0 〈 ع 〈 أ) = 0.5- 0.33 =0.5000 – 0.3300 = 0.17=0.1700 ل (0 〈 ع 〈 أ) = 0.1700 أ = 0.44 (من الجدول)



ل (ع 〈أ) = 0.83
لما أن 0.83 〈 $\frac{1}{2}$ وتمثل المساحة فوق أ
إذن (أ) يجب أن تكون في الجزء السالب
0.83
ل (0 〈 ع 〈أ) = 0.83- $\frac{1}{2}$
ل(أ 〈 ع 〈 (0) = 0.33= ل (0 〈 ع 〈 (أ)
0.33
ل(0 〈 ع 〈 (أ) = 0.33 من الجدول أ= 0.3300
أقرب رقم 0.3289 ويقابل 0.95
أ= 0.95 ولأن أ بالجهة السالبة أ = ‎−0.95
ل (0) 〈 ع 〈أ) = 0.4772
0.4772
ل(0 〈ع 〈أ) = ل (0 〈ع 〈 (أ)
= 0.4772
(أ= 2)
ولأن أ المطلوبة بالجهة السالبة إذن أ= ‎−2
ل (ع 〈 أ) = 0.8085
بما أن 0.8085 〈 $\frac{1}{2}$ وتمثل مساحة فوق أ
إذن (أ) يجب أن تكون في الجهة السالبة
0.8085
ل(أ 〈 ع 〈 (0) = 0.8085‎− 0.5
= 0.3085
ل(أ 〈 ع 〈 (0) = ل (0 〈 ع 〈 (أ) = 0.3085
أ= 0.87
ولأن أ في الجهة السالبة إذن
(أ = ‎−0.87)

تمرين بيتي

ملاحظة

ل (1 〈 ع 〈 −1) ✗ | ل (ع 〈 1) + ل (ع 〈 −1) ✓

أوجد ل (ع 〈 1) + ل (ع 〈 −1)

1−   0   1

أوجد ل (−1 〈 ع 〈 −1)

1−   0   1

تطبيقات عملية على المنحنى الطبيعي

تذكير : المساحة تحت المنحى تمثل النسبة المئوية للفئة التي مثلت بالمنحنى والتي تقل أو تزيد عن قيمة معينة.

1) تتخذ أطوال ألف طالباً توزيعاً طبيعاً وسطه الحسابي (160) وانحرافه المعياري (10) أوجد

أولاً: النسبة المئوية للطلبة اللذين تقل أطوالهم عن (170)

ثانياً: النسبة المئوية للطلبة اللذين تزيد أطوالهم عن (180)

ثالثاً: النسبة المئوية للطلبة اللذين تتراوح أطوالهم بين (165) و (175).

رابعاً: عدد الطلبة الذين تزيد أطوالهم عن (175)

الحل: عدد الطلبة = 1000 ، $\bar{س}$ = 160 ، δ = 10 ، س= طول الطالب .

أولاً: ل (س 〈 170) = نعبر عنها بدلالة العلامة المعيارية

$$= ل\ (س 〈 170) = ل\ (\frac{س - \bar{س}}{\delta} 〈 \frac{170 - \bar{س}}{\delta})$$

$$= ل\ (س 〈 170) = ل\ (ع 〈 \frac{170 - 160}{10})$$

= ل (س 〈 170) = ل (ع 〈 1) [نجدها كما تعلمنا سابقاً].

$$\Leftarrow ل(ع 〈 1) = \frac{1}{2} + ل\ (0 〈 ع 〈 1)$$

$$= 0.5 + 0.3413 = 0.8413$$

النسبة المئوية = 0.8413× 100= 48.13٪.

ثانياً: ل (س 〉 180) = ل (ع 〉 $\frac{180 - 160}{10}$) = ل (ع 〉 2)

ل (ع 〉 2) = 0.5 − ل (0 < ع < 2)

$= 0.5 - 0.4772 = 0.0228$

النسبة المئوية = $0.0228 \times 100 = 2.28\%$

ثالثاً: ل (165 〈 س 〈 175) = ل ($\frac{165-160}{10}$ 〈ع〉 $\frac{175-160}{10}$)

= ل ($\frac{1}{2}$ 〈ع〉 1.5) = ل(1.5 〈ع〉 0) – ل ($\frac{1}{2}$ 〈ع〉 0)

$= 0.4332 - 0.1915$

$= 0.2417$

النسبة المئوية= $0.2417 \times 100 = 24.17\%$

رابعاً: ل (س 〈175) = ل (ع 〈 $\frac{175-160}{10}$) = ل (ع〈 1.5)

$= 0.0668$

عدد الطلبة = المساحة × العدد الكلي

$= 0.0668 \times 1000$

$= 66.8 \approx 67$ طالب

2) يخضع معامل الذكاء للطلبة المسجلين في كليات المجتمع للتوزيع الطبيعي $\bar{س} = 150$، $\delta = 10$ ما نسبة طلبة كليات المجتمع الذين يقع معدل ذكائهم بين (160- 140).

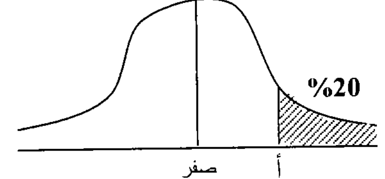
الجواب: نسبة الطلبة = **68.26**

3) تمنح إدارة مدرسة جوائز نقدية لأعلى 20٪ من طلابها فإذا كانت علامات الطلاب تخضع لتوزيع طبيعي فيه: $\bar{س} = 65$، $\delta = 7$ فما أقل علامة تحصل على جائزة تقديرية.

الحل : بما أن التوزيع طبيعي وليس معياري إذن العلامة هي (س) ويجب إيجادها من السؤال: نسبة الطلاب الحاصلين على جوائز هم أعلى 20٪ = ل(ع > أ) = 0.20

ومنها يكون ل (0 ‹ ع ‹ أ) = 0.50 – 0.20 = 0.30

ومن الجدول يكون أ = 0.84.

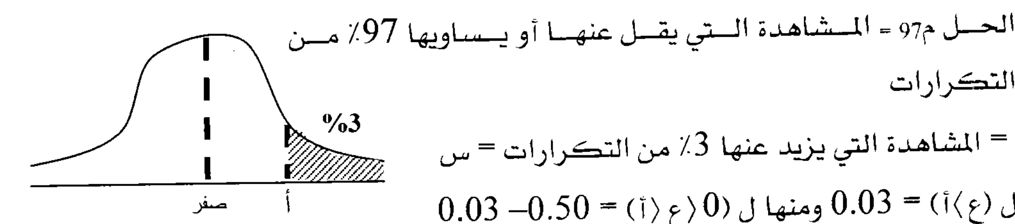


ولكن أقل علامة تحصل على جائزة نقدية العلامة الحقيقية المكافئة للعلامة المعيارية (أ) ونحتاج لإيجادها.

$ع = \frac{س - \bar{س}}{\delta} \Leftarrow 0.84 = \frac{س - 65}{7} \Leftarrow س = 70.88$ أي من حصل على (70) فما فوق يأخذ جائزة تقديرية.

4) إذا كان $\bar{س} = 60$، $\delta = 5$ فجد $م_{97}$ باستخدام المنحنى الطبيعي المعياري :

الحل $م_{97}$ = المشاهدة التي يقل عنها أو يساويها 97٪ من التكرارات



= المشاهدة التي يزيد عنها 3٪ من التكرارات = س

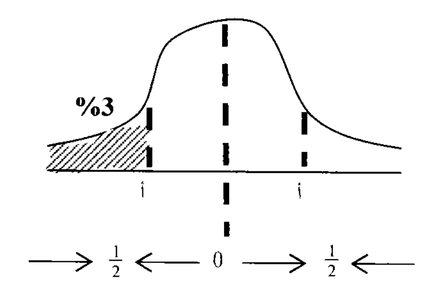
ل (ع ‹ أ) = 0.03 ومنها ل (0 ‹ ع ‹ أ) = 0.50 – 0.03

= 0.47

ومن الجداول يكون أ = 1.88 ونحن نريد قيمة س

$ع = \frac{س - \bar{س}}{\delta} \Leftarrow 1.88 = \frac{س - 60}{5} \Leftarrow س = 69.4$

5) تفصل إدارة مدرسة أقل (30٪) من طلابها ، فإذا كانت علامات الطلاب تخضع لتوزيع طبيعي فيه $\bar{س} = 65$ ، $\delta = 7$ فما هي أكثر علامة يفصل عليها الطلاب :



ل (ع 〈 أ) = ل (0 〈 ع 〈 أ) = 0.20

ومن الجدول يكون أ= ‎−0.52

$$ع = \frac{س - \bar{س}}{\delta}$$

$$-0.52 = \frac{س - 65}{7} \Leftrightarrow س = 61.36$$

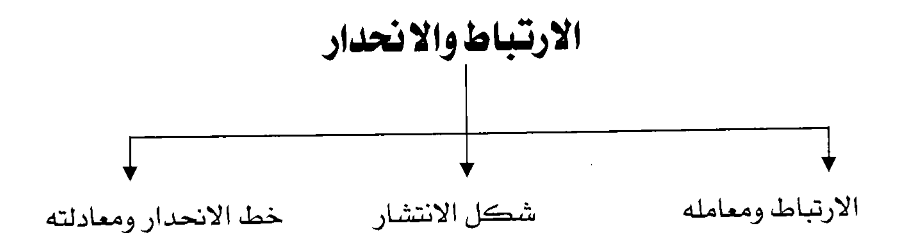
كل طالب حصل على (61.36) أو أقل يفصل

الوحدة السادسة

الارتباط والانحدار

محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
6– 1	مفهوم الارتباط
6– 2	جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط
5– 3	معامل الارتباط وخصائصه
6– 4	معامل ارتباط بيرسون
6– 5	معامل ارتباط سبيرمان
6– 6	مفهوم الانحدار
6– 7	معادلتي خط الإنحدار





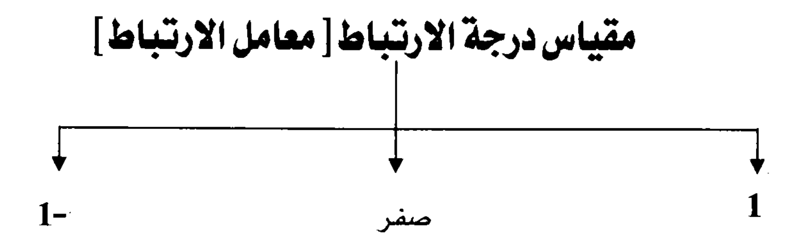
أولاً: الارتباط ومعامله

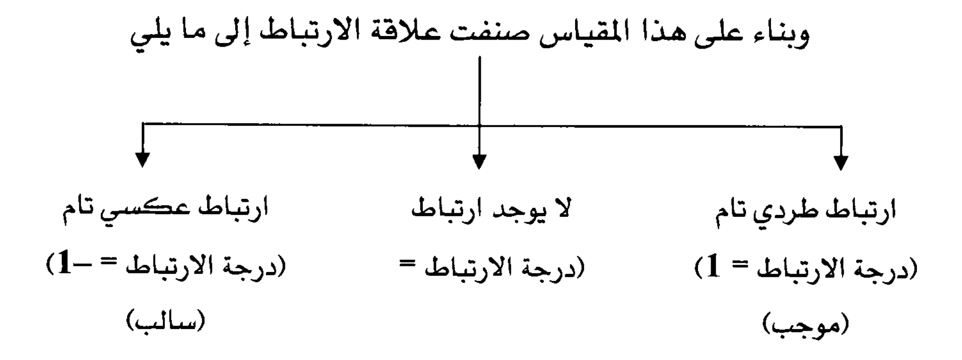
الارتبـاط: قـوة العلاقـة بـين مـتغيرين وهـو أحـد أنـواع العلاقـات بـين المـتغير التـابع والمتغير المستقل بحيث تتحدد بعض مشاهدات المتغير التابع في ضوء المتغير المستقل حيث: س: متغير مستقل ، ص : متغير تابع.

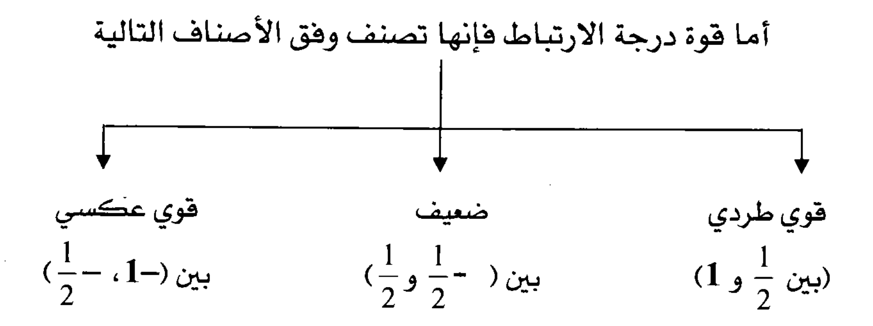
أهمية الارتبـاط: يـستعمل للتنبـؤ والتخطـيط فيمكن أن يؤخـذ التغيّـر في الظـاهرة المستقلّة دليلاً على التغيّر في الظاهرة التابعة.

توضيح: نرصد التغير في الظاهرة المستقلة ومن هـذا الرصد نتنبـأ بـالتغير المتوقـع في الظاهرة التابعة.

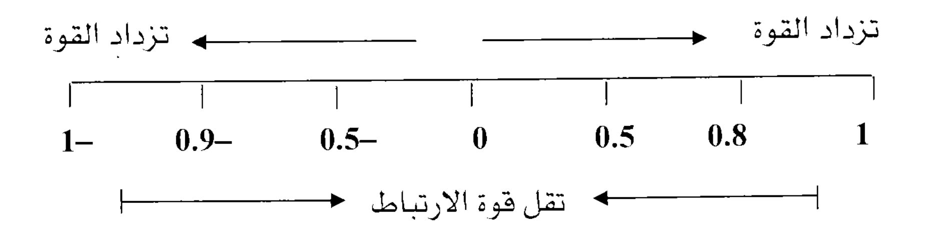
درجة الارتباط: تقاس بعدد يتراوح مقداره بين (−1 ، 1) مروراً بالصفر







ملاحظة هامة: تزداد قوة الارتباط كلما اقترينا من الأطراف وتقل كلما ابتعدنا عن الأطراف.



مثال: ضع دائرة حول معامل الارتباط الأقوى فيما يلي:

أ) 0.6　　ب) −0.5　　جـ) −0.9　　د) 0.3

الحل: أقرب رقم للأطراف (1) أو (−1) هو −0.9 إذن الإجابة (جـ)

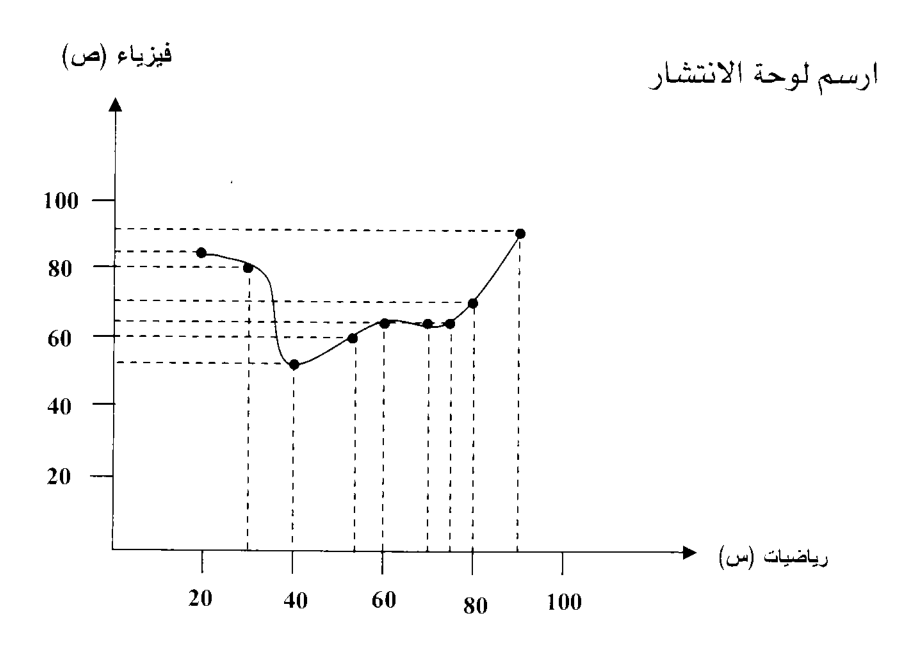
جداول الانتشار وعلاقتها بالارتباط.

الانتشار: التمثيل البياني للعلاقة بين متغيرين ويكون ذلك برصد نقاط المتغيرين على المحورين الأفقي والعمودي.

مثال: الجدول التالي يمثل العلامة النهائية لـ (10) طلاب في مساقي الفيزياء والرياضيات حيث س : الرياضيات، ص الفيزياء، العلامة الكلية = 100.

رياضيات (س)	80	60	55	40	75	85	70	60	30	20
فيزياء (ص)	75	65	60	50	70	90	70	55	80	85

ارسم لوحة الانتشار



طرق قياس درجة الارتباط

(معامل الارتباط)

معامل الارتباط: هو المقياس الرقمي لقوة الارتباط بين متغيرين مثل س، ص وله مجموعة من الخصائص هي:

1) تتراوح قيمة معامل الارتباط بين −1، 1 أي أن −1 ≤ ر ≤ 1 حيث ر: معامل الارتباط.

2) يستخدم المعيار التالي للحكم على معامل الارتباط [وصف معامل الارتباط].

أ- تزداد قوة العلاقة كلما اقترب معامل الارتباط من الأطراف [−1 ، 1] وتقل كلما اقتربنا من الصفر.

ب- إذا كانت ر ∈ (0، 1] ← العلاقة موجبة أو طردية.

بصورة أخرى: 0 < ر ≤ 1 ← العلاقة موجبة أو طردية.

ج- إذا كانت ر ∈ [−1، 0) ← العلاقة عكسية.

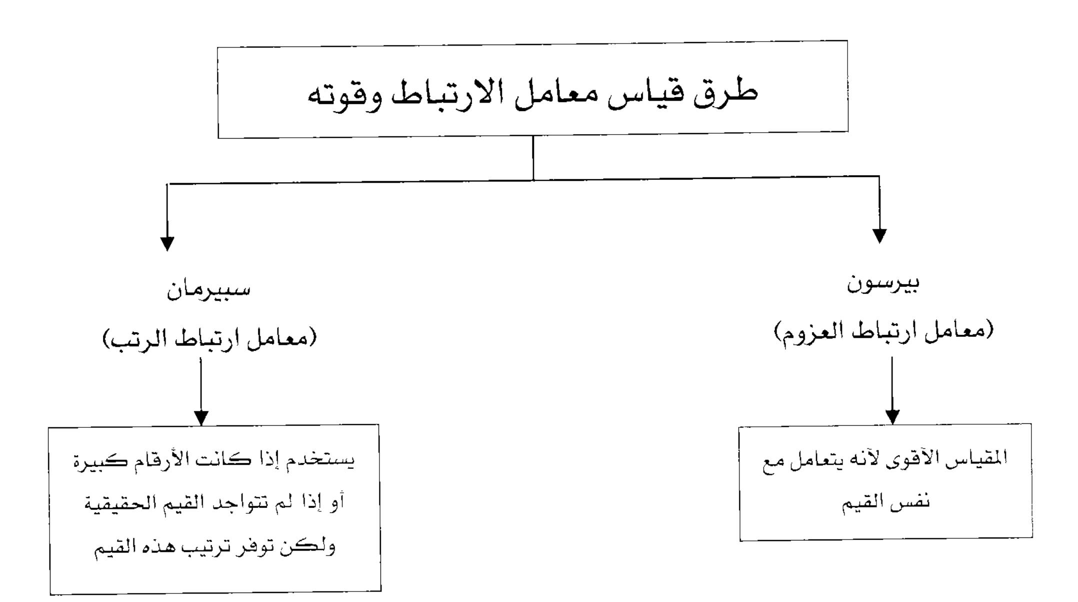
بصورة أخرى: −1 ≤ ر < 0 ← العلاقة عكسية.

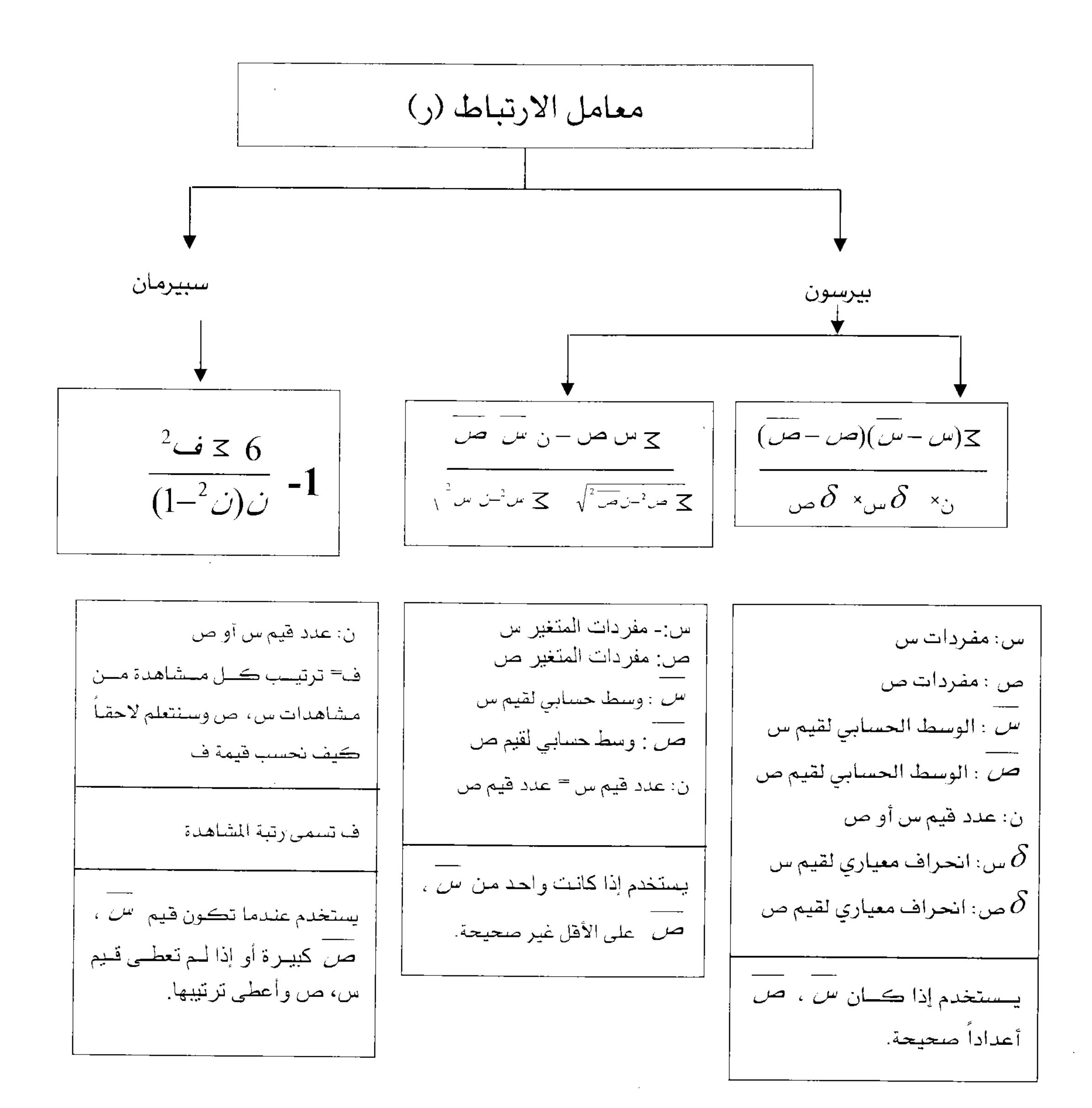
د- إذا كانت ر = 1 ← علاقة طردية مطلقة (تامة).

ه- إذا كانت ر = −1 ← علاقة عكسية مطلقة.

و- إذا كانت ر = صفر ← لا يوجد ارتباط.

3) إذا وقعت جميع نقاط لوحة الانتشار على خط مستقيم فإن ر = ± 1





معامل الارتباط (ر)
بيرسون
سبيرمان
$\frac{\sum(س - \bar{س})(ص - \bar{ص})}{ن \times \delta_{س} \times \delta_{ص}}$
$\frac{\sum س ص - ن \bar{س} \bar{ص}}{\sqrt{\sum س^2 - ن \bar{س}^2} \sqrt{\sum ص^2 - ن \bar{ص}^2}}$
1- $\frac{6 \sum ف^2}{ن(ن^2-1)}$
س: مفردات س
ص : مفردات ص
$\bar{س}$: الوسط الحسابي لقيم س
$\bar{ص}$: الوسط الحسابي لقيم ص
ن: عدد قيم س أو ص
$\delta_{س}$: انحراف معياري لقيم س
$\delta_{ص}$: انحراف معياري لقيم ص
يستخدم إذا كان $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ أعداداً صحيحة.
س:- مفردات المتغير س
ص: مفردات المتغير ص
$\bar{س}$: وسط حسابي لقيم س
$\bar{ص}$: وسط حسابي لقيم ص
ن: عدد قيم س = عدد قيم ص
يستخدم إذا كانت واحد من $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ على الأقل غير صحيحة.
ن: عدد قيم س أو ص
ف= ترتيب كل مشاهدة من مشاهدات س، ص وسنتعلم لاحقاً كيف نحسب قيمة ف
ف تسمى رتبة المشاهدة
يستخدم عندما تكون قيم $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ كبيرة أو إذا لم تعطى قيم س، ص وأعطى ترتيبها.

مثال (شامل) : أوجد معامل ارتباط بيرسون للمتغيرين س، ص حيث

س	1	2	3	4	5
ص	1	1 -	4 -	6 -	5 -

معامل ارتباط بيرسون (القانون الأول) = $\dfrac{\sum(\text{س}-\overline{\text{س}})(\text{ص}-\overline{\text{ص}})}{\text{ن}\times\delta\,\text{س}\times\delta\,\text{ص}}$

$\overline{\text{س}} = \dfrac{\sum \text{س}}{\text{ن}} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$ ، $\overline{\text{ص}} = \dfrac{1+-1+-4+-6+-5}{5} = -3$

$\overline{\text{س}} = 3$ ، $\overline{\text{ص}} = -3$ ، $\text{ن} = 5$

$\delta\,\text{س} = \sqrt{\dfrac{\sum \text{س}^2}{\text{ن}} - (\overline{\text{س}})^2}$ ، $\delta\,\text{ص} = \sqrt{\dfrac{\sum \text{ص}^2}{\text{ن}} - (\overline{\text{ص}})^2}$

س	ص	س ـ $\overline{\text{س}}$	ص ـ $\overline{\text{ص}}$	(س ـ $\overline{\text{س}}$) (ص ـ $\overline{\text{ص}}$)	س^2	ص^2	إيجاد δ س، δ ص
1	1	1- 3= 2–	1–-3=4	–2×4=–8	1	1	$\delta\,\text{س} = \sqrt{\dfrac{55}{5} - (3)^2}$
2	–1	2- 3= –1	-1–-3=2	–1×2=–2	4	1	$= 11-9$
3	–4	3-3= ∴	–4+3=–1	0×–1=0	9	16	$= \sqrt{2}$
4	–6	4- 3=1	–6+3=–3	1×–3=–3	16	36	$\delta\,\text{ص} =$
5	–5	5- 3=2	–5+3=–2	2×–2=–4	25	25	$\sqrt{\dfrac{79}{5} - (-3)^2}$
$\sum$س=15	$\sum$ص=–15			–17	55	79	$= \sqrt{6.8}$

معامل ارتباط بيرسون = $\frac{-17}{\sqrt{6.8 \times \sqrt{2} \times 5}}$ = ‎-0.92 (عكسية قوية)

معامل ارتباط بيرسون

القانون الثاني

$$\frac{\sum \text{س ص} - \text{ن}\, \bar{\text{س}}\, \bar{\text{ص}}}{\sqrt{\sum \text{س}^2 - \text{ن}\,\bar{\text{س}}^2}\ \sqrt{\sum \text{ص}^2 - \text{ن}\,\bar{\text{ص}}^2}}$$

من السابق أوجدنا

$\bar{\text{س}} = 3$ ، $\bar{\text{ص}} = -3$

س	ص	س ص	س2	ص2
1	1	1	1	1
2	1-	2-	4	1
3	4-	12-	9	16
4	6-	24-	16	36
5	5-	25-	25	25
		62-	55	79

معامل ارتباط بيرسون

$$\frac{-62 - (5 \times 3 \times -3)}{\sqrt{55 - 5 \times (3)^2}\ \sqrt{79 - 5 \times (3)^2}}$$

$$= \frac{-62 - -45}{\sqrt{55 - 45}\ \sqrt{79 - 45}} = \frac{-17}{\sqrt{34} \times \sqrt{10}}$$

$$\text{ر} = \frac{-17}{\sqrt{34 \times 10}} = \frac{-17}{18.44} = -0.92$$ (عكسية قوية)

إيجاد معامل ارتباط سبيرمان

مثال: أوجد معامل ارتباط سبيرمان للمتغيرين س، ص حيث أن

س	8	10	6	4	12	13	5	11	9
ص	150	160	150	130	165	180	120	160	150

الحل : معامل ارتباط سبيرمان = $1 - \frac{6 \sum \text{ف}^2}{\text{ن}(\text{ن}^2 - 1)}$ حيث أن

ن = عدد المفردات

ف= رتبة (س) – رتبة (ص)

طريقة إيجاد رتبة كل من (س، ص)

(1	نرتب قيم ص تنازلياً	180	165	160	160	150	150	150	130	120
(2	نرقم القيم	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(3	رتبة ص	1	1	$\frac{4+3}{2}$ 3.5	$\frac{4+3}{2}$ 3.5	$\frac{7+6+5}{3}$ 6	$\frac{7+6+5}{3}$ 6	$\frac{7+6+5}{3}$ 6	8	9

(1	نرتب قيم س تنازلياً	13	12	11	10	9	8	6	5	4
(2	نرقم القيم	1	2	3	4	5	6	7	8	9
(3	رتبة س	1	2	3	4	5	6	7	8	9

س	ص	رتبة س	رتبة ص	ف = رتبة س _ رتبة ص	$ف^2$
8	150	6	6	صفر	صفر
10	160	4	3.5	0.5	0.25
6	150	7	6	1	1
4	130	9	8	1	1
12	165	2	2	صفر	صفر
13	180	1	1	صفر	صفر
5	120	8	9	1-	1
11	160	3	3.5	0.5-	0.25
9	150	5	6	1-	1
					4.5

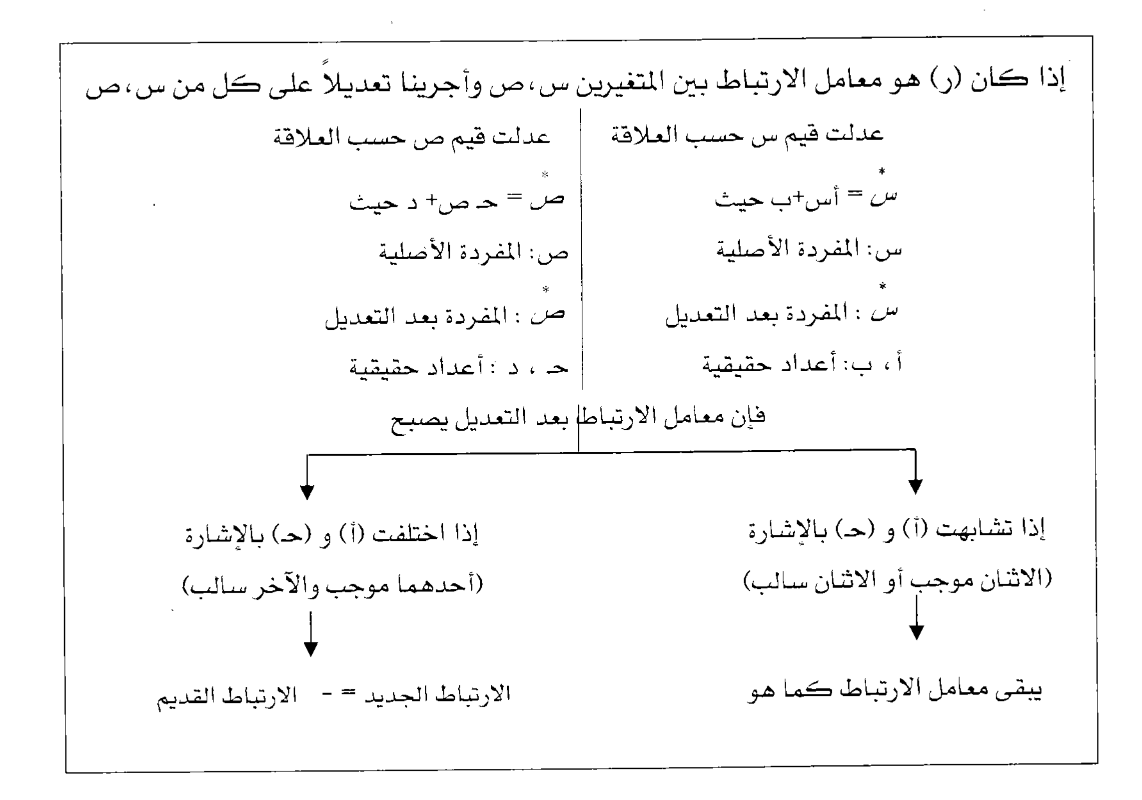
معامل ارتباط سبيرمان = $1 - \frac{(4.5)\times 6}{(1-81)9} = 1 - \frac{27}{720} = 0.963$ (طردي قوي)

تمرين شامل: أوجد معامل ارتباط سبيرمان ومعامل ارتباط بيرسون لقيم س، ص

س	5	8	3	1	4	3
ص	6	10	4	1	5	4

الإجابات: معامل ارتباط سبيرمان = 1 ، معامل ارتباط بيرسون = 99.7 ≈ 1

أثر التحويلات الخطية على معامل الارتباط



مثال : إذا علمت أن معامل الارتباط للمتغيرين س، ص يساوي ($\frac{1}{2}$) وعدلت قيم كل من س، ص حسب العلاقات التالية:

$\overset{*}{س}$ = 5−2 س، $\overset{*}{ص}$ = 7−3 س

بناء على ما سبق أحسب معامل الارتباط الجديد

الحل = معامل (س) = أ= −2، معامل ($\overset{*}{ص}$)= حـ = −3

بما أن (أ) و (حـ) متشابهان في الإشارة إذن

معامل الارتباط الجديد = معامل الارتباط القديم = $\frac{1}{2}$

مثال: متغيرين س، ص عدلت قيمه حسب العلاقات التالية:

$\overset{*}{س}$ = 2س−7 ، $\overset{*}{ص}$ = 1− 5 ص إذا كان معامل الارتباط الأصلي = −0.6 فكم يكون معامل الارتباط بعد التعديل.

مثال: إذا كان (ر= 0.9) بين س، ص وعدلت كل من س، ص كما يلي:

$\overset{*}{س}$ = 2س+6 ، $\overset{*}{ص}$ = 8- 3ص أوجد معامل الارتباط بين $\overset{*}{س}$ ، $\overset{*}{ص}$

مثال: احسب معامل الارتباط بيرسون للمتغيرين ($\overset{*}{س}$ ، $\overset{*}{ص}$) إذا علمت أن واحسب معامل الارتباط بيرسون للمتغيرين (س، ص).

س	38	41	36	34	37	36
ص	53	57	51	48	52	51

علماً بأن $\overset{*}{س}$ = س- 33، $\overset{*}{ص}$ = ص- 47

الحل: لاحظ أن معامل (س)، معامل(ص) متشابهان في الإشارة وهذا معناه أن معامل الارتباط لا يتغير أي أن معامل ارتباط (س،ص) = معامل ارتباط ($س^*$ ، $ص^*$) لذا نجد الأسهل إما ر للمتغيرين (س،ص) أو (ر) للمتغيرين المعُدّلين ($س^*$ ، $ص^*$) وتلاحظ أن قيم $س^*$ ، $ص^*$ أسهل لأنها أصغر بالقيمة

وسط ($س^*$) = $\frac{24}{6}$ =4، ($ص^*$) = $\frac{30}{6}$ = 5

س	ص	$س^*$	$ص^*$	$س^*$ $ص^*$	$(س^*)^2$	$(ص^*)^2$	
38	53	38−33=5	6	30	25	36	
41	57	8	10	80	64	100	
36	51	3	4	12	9	16	
34	48	1	1	1	1	1	
37	52	4	5	20	16	25	
36	51	3	4	12	9	16	
		24	30	155	124	194	

معامل ارتباط بيرسون بين ($س^*$ ، $ص^*$)= $\dfrac{\sum س^* ص^* - ن \times \bar{س}^* \times \bar{ص}^*}{\sqrt{\sum (س^*)^2 - ن \times \bar{س}^{*2}} \times \sqrt{\sum (ص^*)^2 - ن \times \bar{ص}^{*2}}}$

$$= \frac{155 - 6\times4\times5}{\sqrt{124 - 6\times(4)^2}\ \sqrt{194 - 6\times(5)^2}} = \frac{35}{35.09} = 0.997$$

≈ 1 (طردية تامة)

مثال : أوجد معامل الارتباط بين قيم المتغيرين س، ص حيث أن

س	20000	30000	50000	60000	70000
ص	30000	20000	40000	10000	60000

الحل: عندما تكون القيم كبيرة نعدّل نحن القيم من خلال القسمة على رقم (مناسب) و جمع (صفر)

تعديل قيم (س) حسب العلاقة: $س^* = \frac{س}{10000} +$ صفر

تعديل قيم (ص) حسب العلاقة: $ص^* = \frac{ص}{10000} +$ صفر

لاحظ أن معامل ارتباط $س^*$، $ص^*$ نفس معامل ارتباط س، ص لأن معاملات س، ص متشابهة بالإشارة

الآن بدلاً من أن نجد (ر) لقيم (س،ص) نجد (ر) لقيم $س^*$ ، $ص^*$ بعد أن ننتجها[تمرين ذاتي]

مثال : البيانات التالية تمثل علامات (6) طلاب في مادتي الإحصاء والرياضيات وكانت مرتبة كما يلي أوجد معامل الارتباط بين المبحثين:

الرقم	1	2	3	4	5	6
الإحصاء	ممتاز	جيد جداً	جيد	جيد	ضعيف	مقبول
الرياضيات	مقبول	ضعيف	مقبول	جيد	جيد جداً	ممتاز

الحل: بما أنه لدينا رتب ولا يوجد عندنا علامات الطلاب إذن يجب أن نستخدم معامل ارتباط سبيرمان لأنه خاص بالرتب.

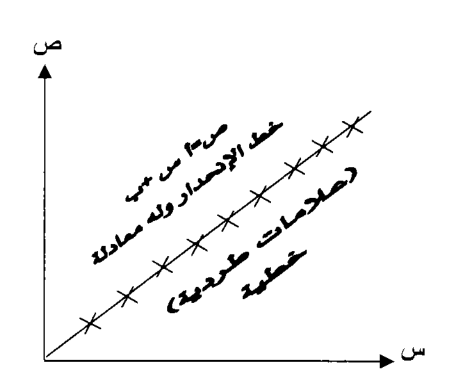
س	رتبة س	ص	رتبة ص	ف= رتبة س- رتبة ص	ف^2
ممتاز	1	ممتاز	1	0	صفر
جيد جداً	2	جيد جداً	2	0	صفر
جيد	3.5	جيد	3	0.5	0.25
جيد	3.5	مقبول	4.5	1-	1
مقبول	5	مقبول	4.5	0.5	0.25
ضعيف	6	ضعيف	6	صفر	صفر
					∑ف^2 = 1.5

معامل ارتباط سبيرمان = $1 - \frac{6 \times 1.5}{6(36-1)} = 0.958$ (طردي قوي)

الانحدار

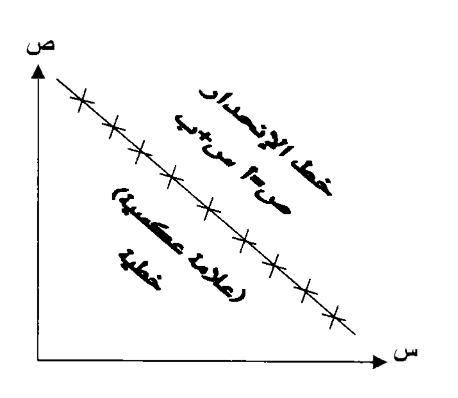
الانحدار: لمعرفة طبيعة العلاقة بين متغيرين نرسم شكل الانتشار ومن شكل الانتشار نلاحظ مدى تباعد أو تجمع النقاط حول خط مستقيم فإذا كانت النقاط تتجمع حول خط مستقيم فإننا نقول إن العلاقة بين المتغيرين س، ص علاقة خطية.

ملاحظة : لو كانت النقاط جميعها على الخط يكون معامل الارتباط ± 1 حيث أن :



معامل (س) = أ = موجب = أ ≠ 0

معامل الارتباط بين (س، ص) = 1



معامل (س)= أ= سالب = أ ≠ 0

معامل الارتباط بين (س،ص) = −1

إن النموذج الرياضي الذي يعبر عن العلاقة بين المتغيرين س، ص هو:

ص = أ س + ب أو س = حـ ص + د حيث

أ ≠ صفر، حـ ≠ صفر

أ ، ب، حـ، د : أعداد حقيقية

معادلة خط انحدار (ص) عن (س)	معادلة خط انحدار (س) عن (ص)
ص = أس + ب ونحتاج هنا لإيجاد قيمة كل من أ ، ب	س = حـ ص + د ونحتاج لإيجاد قيمة كل من حـ ، د
لإيجاد قيمة (أ): أ= $\frac{\delta ص}{\delta س}$ × ر δ: انحراف معياري ر: معامل ارتباط أ = $\frac{\sum س ص - ن \overline{س}\ \overline{ص}}{\sum}$	**لإيجاد قيمة (جـ)**: حـ= $\frac{\delta س}{\delta ص}$ × ر حـ = $\frac{\sum س ص - ن \overline{س}\ \overline{ص}}{\sum ص^2 - ن (\overline{ص})^2}$
لإيجاد قيمة (ب): ب= $\overline{ص}$ − أ $\overline{س}$ $\overline{س}$: وسط حسابي $\overline{ص}$: وسط حسابي أ : معامل (س)	**لإيجاد قيمة (د)**: د= $\overline{ص}$ − حـ$\overline{س}$
تستخدم لتوقع قيمة (ص) إذا علمت (س)	تستخدم للتنبؤ بقيمة (س) إذا علمت قيمة (ص)

مثال: إذا كان معامل الارتباط بين نتائج الطلبة في الامتحان س والامتحان ص يساوي (ر =0.7) حيث $\overline{\text{س}}$ = 60، $\overline{\text{ص}}$ = 55، δ س = 7، δ ص = 11:

1) أوجد معادلة خط انحدار (ص) على (س).

2) أوجد نتيجة الطالب المتوقعة في الامتحان (ص) إذا كانت (س=65).

3) أوجد قيمة (س) المتوقعة إذا علمت أن قيمة (ص=60).

الحل (1) معادلة خط انحدار (ص) على (س) هي: ص = أس+ب

إيجاد قيمة (أ)

$$\text{أ} = \frac{\delta\,\text{ص}}{\delta\,\text{س}} \times \text{ر}$$

$$\text{أ} = \frac{11}{7} \times 0.7 = 1.1$$

$$\text{أ} = 1.1$$

إيجاد قيمة (ب)

$$\text{ب} = \overline{\text{ص}} - \text{أ}\overline{\text{س}}$$

$$\text{ب} = 55 - (1.1 \times 60)$$

$$= 55 - 66$$

$$\text{ب} = -11$$

معادلة خط انحدار ص على س : (ص = 1.1س– 11)

(2) إيجاد نتيجة الطالب المتوقعة في (ص) إذا كانت س =65.

عندما تكون (س=65) كم تكون قيمة (ص)

$$\text{ص} = 1.1\text{س} - 11$$

$$\text{ص} = (1.1 \times 65) - 11$$

$$\text{ص} = 60.5$$

(3) لإيجاد قيمة (س) المتوقعة إذا كانت ص = 60 يجب أن نجد معادلة انحدار (س) على (ص).

س= حـ ص + د

إيجاد قيمة (حـ)

حـ= $\frac{\delta س}{\delta ص}$ × ر

حـ= $\frac{7}{11}$ × 0.7

حـ = 0.448

إيجاد قيمة (د)

د = $\overline{ش}$ – حـ$\overline{ص}$

د = 60 – (0.448) ×55

د = 35.36

س = 0.448 ص + 35.36

قيمة (س) المتوقعة عندما (ص=60)

س= 0.448 ص+ 35.36

س = (0.448×60) + 35.36

س = 26.88 + 35.36

س = 62.24

مثال: إذا كانت معادلة خط الانحدار للمتغيرين س، ص (س على ص) هي:

س = 2ص+ 90 حيث δ س =15، δ ص =6 أوجد (ر)

الحل : معادلة خط انحدار س على ص: س = حـ ص+د

س = 2ص+ 90

حـ = 2
د = 90

بما أن حـ = $\frac{\delta س}{\delta ص}$ × ر ⇔2 = $\frac{15}{6}$ × ر ⇔ ر = 0.8

مثال: إذا علمت أن ∑ س ص = 198، ∑ص^2 = 196، ∑س^2 = 360

∑س= 93، ∑ص= 62، ن = 31

أوجد معادلة خط انحدار (س) على (ص)

الحل: معادلة خط انحدار (س) على (ص): س = حـ ص+ د

إيجاد قيمة (حـ)

$$حـ = \frac{\sum س ص - ن \bar{س} \bar{ص}}{\sum ص^2 - ن (\bar{ص})^2}$$

$$حـ = \frac{198 - 31 \times 3 \times 2}{196 - 31 \times 4}$$

حـ = 0.16

إيجاد قيمة (د)

$$د = \bar{ص} - حـ \bar{س}$$

$$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{93}{31} = 3$$

$$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{62}{31} = 2$$

$$د = \bar{س} - حـ \bar{ص}$$

$$= 3 - (2 \times 0.16)$$

د = 2.68

معادلة خط انحدار س على ص : س= حـ ص + د

س = 0.16 ص + 2.68

ملاحظة هامة:	الخطأ في التنبؤ = القيمة الحقيقية – القيمة المتنبأ بها

تمرين ذاتي: الجدول التالي يمثل العلاقة بين المتغيرين س، ص بناء عليه

س	2	4	6	8	10
ص	15	9	12	6	3

1) أوجد معامل ارتباط بيرسون [الإجابة = –0.9].

2) أوجد معامل ارتباط سبيرمان [الإجابة = –0.9].

3) جد معادلة خط انحدار (ص) على (س) [المعادلة: ص= –1.35 س + 17.1].

4) جد معادلة خط انحدار (س) على ص) [المعادلة: س= –0.6 ص+ 11.4].

5) أوجد الخطأ بالتنبؤ بقيمة (س) إذا علمت أن قيمة (ص=6) [الإجابة: 0.2].

6) أوجد الخطأ بالتنبؤ بقيمة (ص) إذا علمت أن قيمة (س=6) [الإجابة: 3].

1) احسب معامل ارتباط بيرسون

2) احسب معامل ارتباط سبيرمان

2) معادلة انحدار (ص) على (س)

4) معادلة انحدار (س) على (ص)

5) الخطأ بتنبؤ بقيمة (س) إذا علمت أن (ص=6)

الخطأ بتنبؤ (س) = القيمة الحقيقية لـ (س) – القيمة المتنبأ بها لـ (س).

من جدول السؤال (القيم الحقيقية)

س	8
ص	6

س=8

س= –0.6 ص + 11.4

(س ← تنبؤ، ص ← حقيقة)

س= (–0.6×6) +11.4

س = 7.8

الخطأ بالتنبؤ بقيمة س = القيمة الحقيقية – القيمة المتوقعة

= 8 – 7.8

الخطأ بالتنبؤ = 0.2

6) الخطأ بالتنبؤ بقيمة (ص) إذا علمت أن قيمة (س=6)

الخطأ بتنبؤ (ص) = القيمة الحقيقية لـ (ص) – القيمة المتنبأ بها لـ (ص)

من جدول السؤال (القيم الحقيقية)

س	6
ص	12

ص = 12

ص = –135 س + 17.1

ص = (–1.35 ×6) + 17.1

ص = 9

الخطأ بتنبؤ قيمة (ص) = القيمة الحقيقية – القيمة المتوقعة

= 12 – 9

الخطأ بالتنبؤ = 3

تمرين ذاتي : أوجد معادلة انحدار (ص) على (ص) إذا علمت أن :

س: عدد السيارات المباعة

ص: الربح بالآلف الدنانير

س	15	5	10	20	25
ص	25	13	صفر	22	30

ثم جد قيمة (ص) المتوقعة عندما تكون (س=10)

الحلول : 1) ص = 1.12 س+ 1.2 .

2) ص= 12.4

ملاحظات هامة خاصة بالأسئلة الموضوعية

1) إذا كان هناك متغيرين س، ص بحيث أن :

$\bar{س}$: الوسط الحسابي لمفردات س

$\bar{ص}$: الوسط الحسابي لمفردات ص

فإن الزوج المرتب ($\bar{س}$. $\bar{ص}$)

تحقق كل من معادلتي الانحدار:

انحدار ص على س: $\bar{ص}$ = أس+ب

انحدار س على ص: $\bar{س}$ = حـ ص+ د

بمعنى أنه

($\bar{س}$ ، ص)	($\bar{س}$ ، ص)
ص= أس+ب	س= حـ ص +د
$\bar{ص}$ = أ $\bar{س}$ + ب	$\bar{س}$ = حـ ص + د

بأسلوب آخر إذا مثلت معادلتي خط الانحدار (انحدار ص على س، انحدار س على ص) على نفس المستوى البياني فإن المعادلتين (المستقيمين) يتقاطعان في نقطة تمثل هذه النقطة.

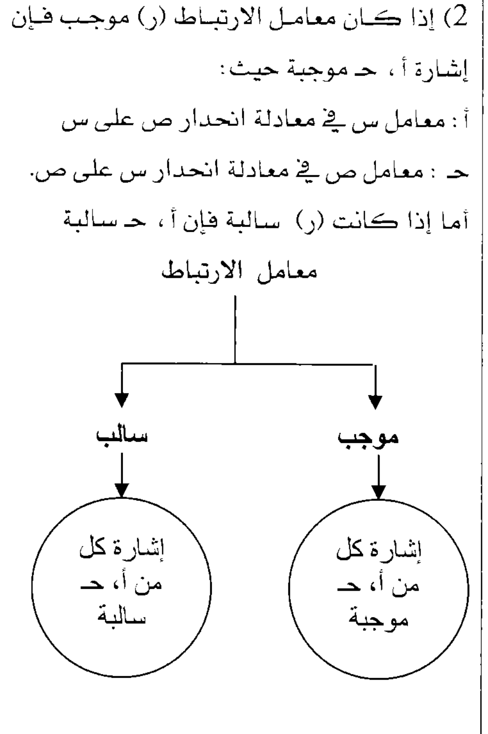
($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$)

2) إذا كان معامل الارتباط (ر) موجب فإن إشارة أ ، حـ موجبة حيث:

أ : معامل س في معادلة انحدار ص على س

حـ : معامل ص في معادلة انحدار س على ص.

أما إذا كانت (ر) سالبة فإن أ ، حـ سالبة



3) $(ر)^2$ = معامل (س) × معامل (ص)

$(ر)^2$ = أ × حـ

ر = $\sqrt{أ \times ج}$

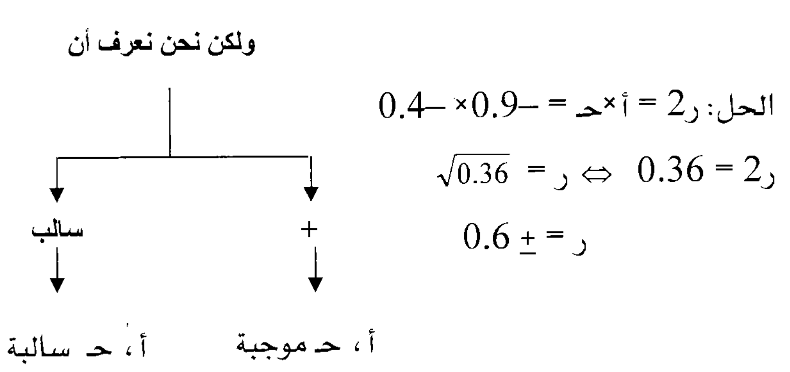
مثال (1): الشكل المجاور يمثل الرسم البياني لمعادلتي الانحدار الخاصة بالمتغيرين س، ص (انحدار ص على س و انحدار س على ص) بالاعتماد على الشكل فإن الزوج المرتب الذي يمثل الوسط الحسابي لكل من المتغيرين س، ص.

أ) (5، 9)　　　　ب) (1، 2)

جـ) (5، 7)　　　　د) (3، 7)

الحل: بما أن المستقيمين يمثلان خطا الانحدار إذن نقطة التقاطع = الوسط الحسابي ($\overline{س}$ ، ص) الوسط الحسابي لـ س، ص = ($\overline{س}$ ، $\overline{ص}$) = (3، 7) [د]

مثال: إذا كانت معادلة خط انحدار (ص) على (س): ص = -0.9 س+8 معادلة خط انحدار (س) على (ص) : س = 9$-$0.4 ص أوجد معامل الارتباط بين المتغيرين س، ص.



الحل: $ر^2$ = أ×حـ = -0.9× -0.4

$ر^2 = 0.36 \Leftrightarrow ر = \sqrt{0.36}$

$ر = \pm 0.6$

إذن (ر= -0.6) هي فقط الإجابة لأن إشارة (ر) نفس إشارة أ ، حـ

مثال: إذا كانت معادلة خط الانحدار ص = $\frac{1}{2}$س+ 7 وكان

$\sum$(س$-\overline{س}$)^2 = 640، $\sum_{1}^{10}$(ص$-\overline{ص}$)^2= 250 أوجد (ر) ، (حـ)

ملاحظة هامة : عدد المفردات ن = 10 [من أعلى رمز المجموع $\sum_{1}^{10}$]

الحل: أ = $\frac{\delta_{ص}}{\delta_{س}}$ × ر ⇔ $\frac{1}{2} = \frac{\delta_{ص}}{\delta_{س}}$ × ر

$\delta_{س} = \sqrt{\frac{\sum (س - \bar{س})^2}{ن}}$

$\delta_{س} = \sqrt{\frac{640}{10}}$

$\delta_{س} = \sqrt{64} = 8$

$\delta_{ص} = \sqrt{\frac{\sum (ص - \bar{ص})^2}{ن}}$

$\delta_{ص} = \sqrt{\frac{250}{10}}$

$\delta_{ص} = \sqrt{25} = 5$

⇐ أ = $\frac{\delta_{ص}}{\delta_{س}}$ × ر ⇔ $\frac{1}{2} = \frac{5}{8}$ × ر

$\frac{8}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{\cancel{5}}{\cancel{8}}$ × ر × $\frac{\cancel{8}}{\cancel{5}}$

$\frac{8}{10}$ = ر = 0.8

لإيجاد قيمة (حـ) : ر^2 = أ × جـ

$(0.8)^2 = \frac{1}{2}$ × حـ

0.64 = 0.5 × جـ ⇔ حـ = $\frac{0.64}{0.5}$

حـ = 1.28

مثال : إذا كانت معادلة خط انحدار (ص) على (س) : ص = 2س –15 وكانت ر = 0.8، $\bar{س}$=50 أوجد معادلة خط انحدار (س) على (ص).

معادلة خط انحدار ص على س

الحل: ص = 2س –15

أ= 2

ب= –15

معادلة خط انحدار س على ص

س = حـ ص + د

حـ= $\frac{\delta\ س}{\delta\ ص}$ ، د = $\bar{س}$ – حـ $\bar{ص}$

ر^2 = أ× حـ ⇔ $(0.8)^2$ = 2× حـ

حـ = $\frac{0.64}{2}$ = 0.32

د= $\bar{س}$ – حـ $\bar{ص}$ = 50–0.32 $\bar{ص}$

لإيجاد ($\bar{ص}$) : ($\bar{س}$ ، $\bar{ص}$) تحقق معادلة الانحدار:

ص = 2س – 15

$\bar{ص}$ = 2 $\bar{س}$ – 15

$\bar{ص}$ = 2× 50 – 15

= 100– 15

$\bar{ص}$ = 85

د = $\bar{س}$ – حـ $\bar{ص}$

د = 50 – (0.32× 85)

د = 22.8

إذن: معادلة خط انحدار س على ص : س = حـ ص + د

س = 0.32 ص + 22.8

مثال : إذا كان الانحراف المعياري لـ(س) = 2.8 والانحراف المعياري ص = 3.2 وكان (ر= 0.7) وعلمت أن ($\bar{س}$ = 10)، ($\bar{ص}$ = 6) أوجد معادلة انحدار (ص) على (س) ثم جد قيمة (ص) المتوقعة إذا علمت أن (س=12).

نفس السؤال بصيغة أخرى: جد معادلة الانحدار للتنبؤ بقيمة (ص) إذا علمت قيمة س.

الحل: 1) ص = 0.8 س–2   2) ص = 7.6

مثال : إذا كانت معادلة انحدار ص على س: ص $= \frac{1}{2}$ س -2

انحدار س على ص : س $= \frac{1}{2}$ ص $+ 7$

أوجد $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$

الحل: إن إيجاد نقطة التقاطع بين المعادلتين تمثل قيمة $\bar{س}$ ، $\bar{ص}$ ومن المعروف رياضياً أن عملية إيجاد نقطة التقاطع بين خطين تعني حل المعادلتين بالحذف.

ص$= \frac{1}{2}$ س -2 بالضرب في (2) ينتج أن 2ص= س -4

س$= \frac{1}{2}$ ص+ 7 بالضرب في (2) ينتج أن 2س= ص +14

2(2ص−س=−4) 　　　 −2س + 4ص= −8

2س−ص=14 　　　 2س− ص= 14 　 +

$$\frac{3ص}{3} = \frac{6}{3}$$

ص=2

نعوض (ص=2) في إحدى المعادلتين وينتج أن

س$= \frac{1}{2}$ص+ 7

س$= (\frac{1}{2} \times 2) + 7$

س= 1+7

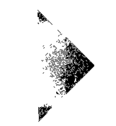
س=8

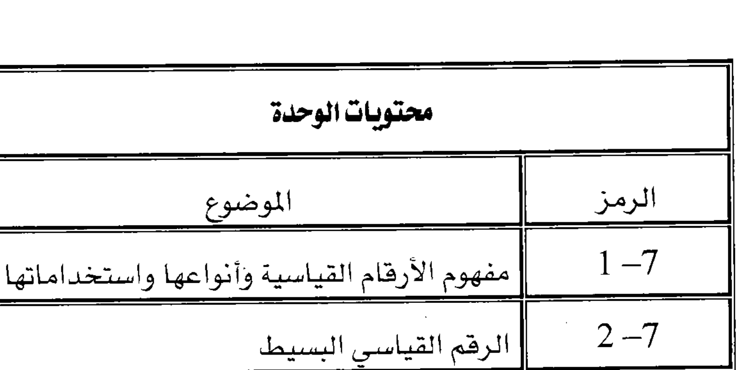
إذن $\bar{س}$ **=8**، $\bar{ص}$ = **2**

الوحدة السابعة



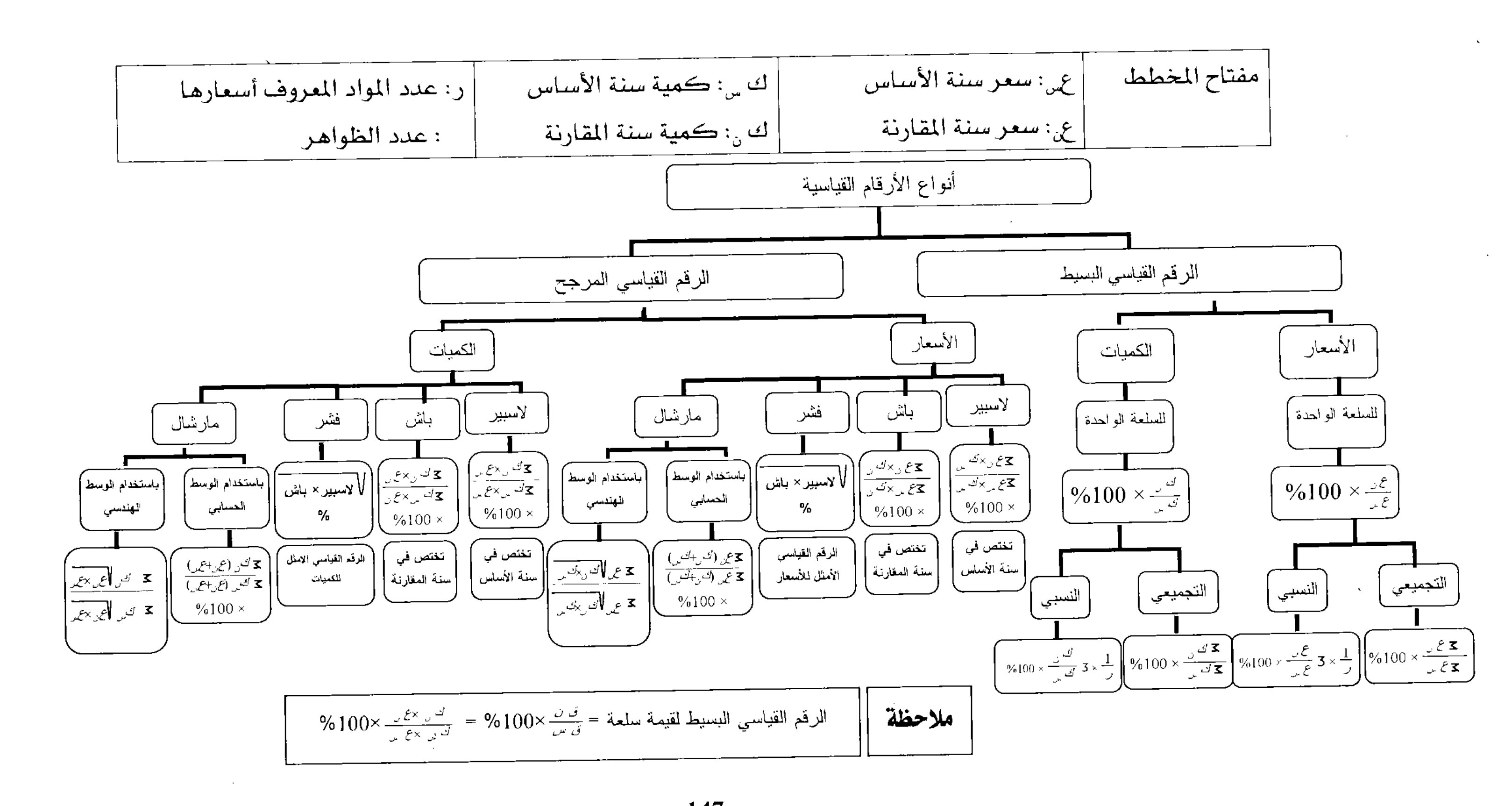
الأرقام القياسية





محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
7– 1	مفهوم الأرقام القياسية وأنواعها واستخداماتها
7– 2	الرقم القياسي البسيط
7– 3	الرقم القياسي المرجح



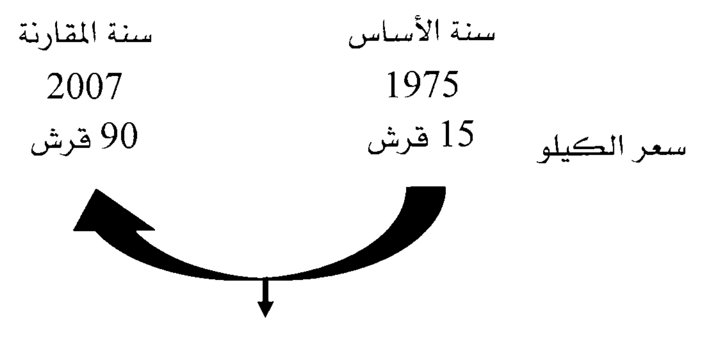


مفتاح المخطط
عس: سعر سنة الأساس
عن: سعر سنة المقارنة
ك س: كمية سنة الأساس
ك ن: كمية سنة المقارنة
ر: عدد المواد المعروف أسعارها
: عدد الظواهر
أنواع الأرقام القياسية
الرقم القياسي البسيط
الرقم القياسي المرجح
الأسعار
الكميات
للسلعة الواحدة
التجميعي
النسبي
لاسبير
باش
فشر
مارشال
باستخدام الوسط الحسابي
باستخدام الوسط الهندسي
تختص في سنة الأساس
تختص في سنة المقارنة
الرقم القياسي الأمثل للأسعار
الرقم القياسي الأمثل للكميات
لاسبير × باش
%
ملاحظة
الرقم القياسي البسيط لقيمة سلعة

الأرقام القياسية

مفهوم الرقم القياسي: أداة تستخدم لقياس التغير النسبي (أو المئوي) في قيم الظواهر في زمن آخر أو من مكان إلى آخر ويكون هناك زمنان أو مكانان أحدهما يمثل الأساس والثاني يمثل المقارن.

مثال للتوضيح: لنفرض أن سعر كغم واحد من الليمون لسنة 1975 هو (15) قرش وأصبح سعره سنة (2007) يساوي (90) قرش. إذا اعتبرنا أن سنة 1975 هي سنة أساس وكانت سنة 2007 هي سنة المقارنة.



قياس التغير النسبي = الرقم القياسي

$$= \frac{\text{سنة المقارنة}}{\text{سنة الأساس}} = \frac{90}{15} = 6$$

إن قيمة التغير الناتجة وهي (6) تعني: كمية الليمون التي كانت تشترى بقرش واحد سنة (1975) تشترى في سنة (2007) بـ (6) قروش.

من أهم استعمالات الأرقام القياسية حساب القوة الشرائية للدخل

$$\text{القوة الشرائية لدخل الفرد} = \frac{\text{الرقم القياسي لدخل الفرد}}{\text{الرقم القياسي لتكاليف المعيشة}} \times 100\ \%$$

مثال : إذا كان الرقم القياسي لدخل الفرد عام (1980) باعتبار سنة (1970) الأساس هو (2.5) والرقم القياسي لتكاليف المعيشة في عام (1980) باعتبار سنة 1970 هي الأساس هو (5) فما القوة الشرائية لدخل الفرد عام 1980 باعتبار 1970 سنة أساس.

الحل : القوة الشرائية لدخل الفرد = $\frac{2.5}{5} \times 100\% = 50\%$

أي أن دخل الفرد قد نقص بنسبة 50٪ ما بين عام 1970 وعام 1980.

مثال شامل : يبين الجدول التالي أسعار وكميات سلع في عامي 1980، 1985 باعتبار أن سنة (1980) هي سنة الأساس أوجد ما يلي:

نوع السلعة	السعر		الكمية	
	1980	**185**	**1980**	**1985**
أ	20	25	20	35
ب	15	20	25	30
جـ	20	22	30	40
د	10	15	10	15

1) الرقم القياسي البسيط للسعر الخاص بالسلعة (أ)
2) الرقم القياسي البسيط لكمية (ب)
3) الرقم القياسي البسيط لقيمة (د)
4) الرقم القياسي التجميعي البسيط للأسعار.
5) الرقم القياسي البسيط للكميات.
6) رقم لاسبير للأسعار.
7) رقم باش للأسعار.
8) رقم فيشر للأسعار.
9) رقم مارشال للأسعار.

10) رقم لاسبير للكميات.

11) رقم باش للكميات.

12) رقم فيشر للكميات.

13) رقم مارشال للكميات.

14) الرقم النسبي للأسعار.

15) الرقم النسبي للكميات.

(1)

$$= \frac{\text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ع}_{\text{س}}} \times 100\%$$

$$= \frac{25}{20} \times 100\%$$

$$= 125\%$$

(2)

$$= \frac{\text{ك}_{\text{ن}}}{\text{ك}_{\text{س}}} \times 100\%$$

$$= \frac{30}{25} \times 100\%$$

$$= 120\%$$

(3)

$$= \frac{\text{ق}_{\text{ن}}}{\text{ق}_{\text{س}}} \times 100\%$$

$$\frac{\text{ك}_{\text{ن}} \times \text{ع}_{\text{ن}}}{\text{ك}_{\text{س}} \times \text{ع}_{\text{س}}} \times 100\%$$

$$= \frac{15 \times 15}{10 \times 10} \times 100\%$$

$$= 225\%$$

(4)

$$\frac{\Sigma \text{ع}_{\text{ن}}}{\Sigma \text{ع}_{\text{س}}} \times 100\%$$

$\Sigma \text{ع}_{\text{ن}} = 25+20+22+15 = 82$

$\Sigma \text{ع}_{\text{س}} = 20+15+206+10 = 65$

$$= \frac{82}{65} \times 100\%$$

$$= 126.15\%$$

(5)

$$\frac{\Sigma \text{ك}_{\text{ن}}}{\Sigma \text{ك}_{\text{س}}} \times 100\%$$

$\Sigma \text{ك}_{\text{ن}} =$

$35+30+40+15=120$

$\Sigma \text{ك}_{\text{س}} = 20+25+30+10=85$

$$= \frac{120}{85} \times 100\%$$

$$= 141.17\%$$

(6)

$$\frac{\Sigma \text{ع}_{\text{ن}} \times \text{ك}_{\text{س}}}{\Sigma \text{ع}_{\text{س}} \times \text{ك}_{\text{س}}} \times 100\%$$

ع س	ع ن	ك س	ع ن × ك س	ع س × ك س
20	25	20	500	400
15	20	25	500	375
20	22	30	660	600
10	15	10	150	100
			1810	1475

$$= \frac{1810}{1475} \times 100\%$$

$$= 122.7\%$$

$$= 123\%$$

(7)

$$\frac{\sum \text{ع}_{\text{ن}} \times \text{ك}_{\text{ن}}}{\sum \text{ع}_{\text{س}} \times \text{ك}_{\text{ن}}} \times 100\%$$

$\text{ع}_{\text{ن}} \times \text{ك}_{\text{ن}}$	$\text{ع}_{\text{س}} \times \text{ك}_{\text{ن}}$
875=35×25	700=35×20
600	450
880	800
225	150
2580	2100

$$= \frac{2580}{2100} \times 100\%$$

$$= 122.9\%$$

$$\approx 123\%$$

(8)

$$\left(\sqrt{\text{لاسبير للأسعار} \times \text{باش للاسعار}}\right)\%$$

$$\sqrt{123 \times 123} = 123\%$$

(9)

$$\frac{\sum \text{ع}_{\text{ن}} \times (\text{ك}_{\text{ن}} + \text{ك}_{\text{س}})}{\sum \text{ع}_{\text{س}} \times (\text{ك}_{\text{ن}} + \text{ك}_{\text{س}})} \times 100\%$$

ك ن + ك س	ع ن (ك ن + ك س)	ع س (ك ن + ك س)
55	1375	1100
55	1100	825
70	1540	1400
25	3750	250
	7765	3575

$$= \frac{7765}{3575} \times 100\%$$

$$= 217.2\% \approx 217\%$$

(10)

$$\frac{\sum \text{ك}_{\text{ن}} \times \text{ع}_{\text{ن}}}{\sum \text{ك}_{\text{س}} \times \text{ع}_{\text{ن}}} \times 100\%$$

$\sum$ ع س × ك ن = 2100

(تم إيجادها سابقاً)

$\sum$ ك س × ع س = 1450

(تم إيجادها سابقاً)

$$= \frac{2100}{1450} \times 100\%$$

$$= 142.4\% \approx 142\%$$

(11)

$$\frac{\sum \text{ك}_{\text{ن}} \times \text{ع}_{\text{ن}}}{\sum \text{ك}_{\text{س}} \times \text{ع}_{\text{ن}}} \times 100\%$$

$\sum$ ك ن × ع ن = 2580

$\sum$ ك س × ع ن = 1810

$$= \frac{2580}{1810} \times 100\%$$

$$= 142.5\%$$

$$\approx 143\%$$

(12)

$$\left(\sqrt{\text{لاسبير للكميات} \times \text{باش للكميات}}\right)\%$$

$$\sqrt{142 \times 143}$$

$$= \sqrt{20306}$$

$$= 142.5\%$$

$$\approx 143\%$$

(13)

$$\frac{\sum ك_ن (ع_ن + ع_س)}{\sum ك_س (ع_ن + ع_س)} \times 100\%$$

$ع_ن + ع_س$	$ك_ن (ع_ن + ع_س)$	$ك_س (ع_ن + ع_س)$
45	1575	900
35	1050	875
42	1680	1260
25	375	250
	4680	3285

$= \frac{4680}{3285} \times 100\%$

$= 142.5\%$

$\approx 143\%$

(14)

$$\frac{1}{ر} \times \sum \left(\frac{ع_ن}{ع_س}\right) \times 100\%$$

$ع_ن$	$ع_س$	$\frac{ع_ن}{ع_س}$
25	20	$\frac{25}{20} = 1.25$
20	15	$\frac{20}{15} = 1.3$
22	20	$\frac{22}{20} = 1.1$
15	10	$\frac{15}{10} = 1.5$
		5.15

$= \frac{1}{4} \times (5.15) \times 100\%$

$= \frac{5.15}{4} \times 100\% = 1.28 \times 100\%$

$= 128\%$

(15)

$$\frac{1}{ر} \times \sum \left(\frac{ك_ن}{ك_س}\right) \times 100\%$$

$ك_ن$	$ك_س$	$\frac{ك_ن}{ك_س}$
35	20	$\frac{35}{20} = 1.75$
30	25	$\frac{30}{25} = 1.2$
40	30	$\frac{40}{30} = 1.3$
15	10	$\frac{15}{10} = 1.5$
		5.75

$= \frac{1}{4} \times (5.75) \times 100\%$

$= 143.75\%$

$\approx 144\%$

تمرين شامل على الفصل: الجدول التالي يمثل أسعار وكميات السلع المباعة في سنة الأساس (1994) وسنة المقارنة 1997م.

السلعة	كميات		أسعار	
	1994	1997	1994	1997
س	200	250	28	40
ص	300	360	16	20
ع	400	460	10	15
ل	600	660	4	10

أوجد :

1) رقم لاسبير للأسعار والكميات.

2) رقم باش للكميات والأسعار.

3) الرقم القياسي الأمثل للأسعار والكميات.

4) رقم مارشال للأسعار والكميات باستخدام الوسط الهندسي.

5) الرقم التجميعي المرجح بكميات سنة الأساس [رقم لاسبير]

6) الرقم القياسي التجميعي المرجح لكميات سنة المقارنة [رقم باش]

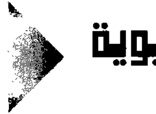
7) الرقم القياسي البسيط لكمية السلعة (ع)

8) الرقم القياسي البسيط لسعر السلعة (س)

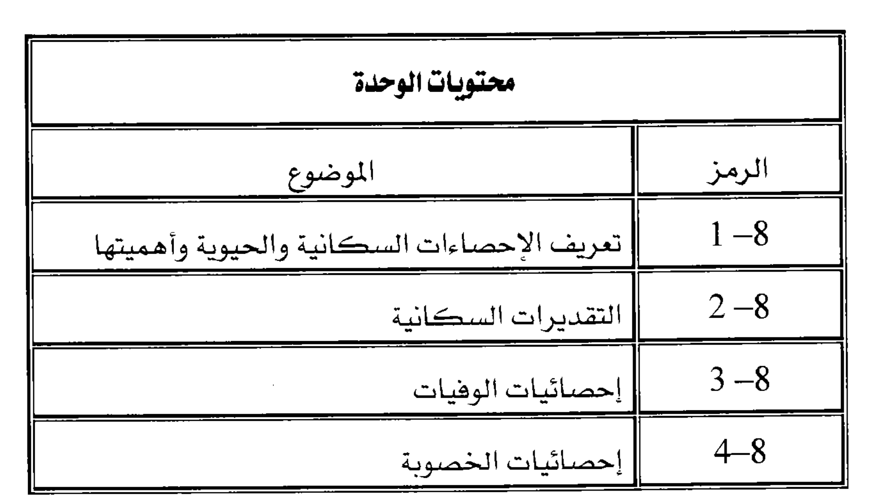
9) الرقم النسبي البسيط للكميات.

10) الرقم التجميعي البسيط للأسعار.

الوحدة الثامنة



الإحصاءات السكانية والحيوية

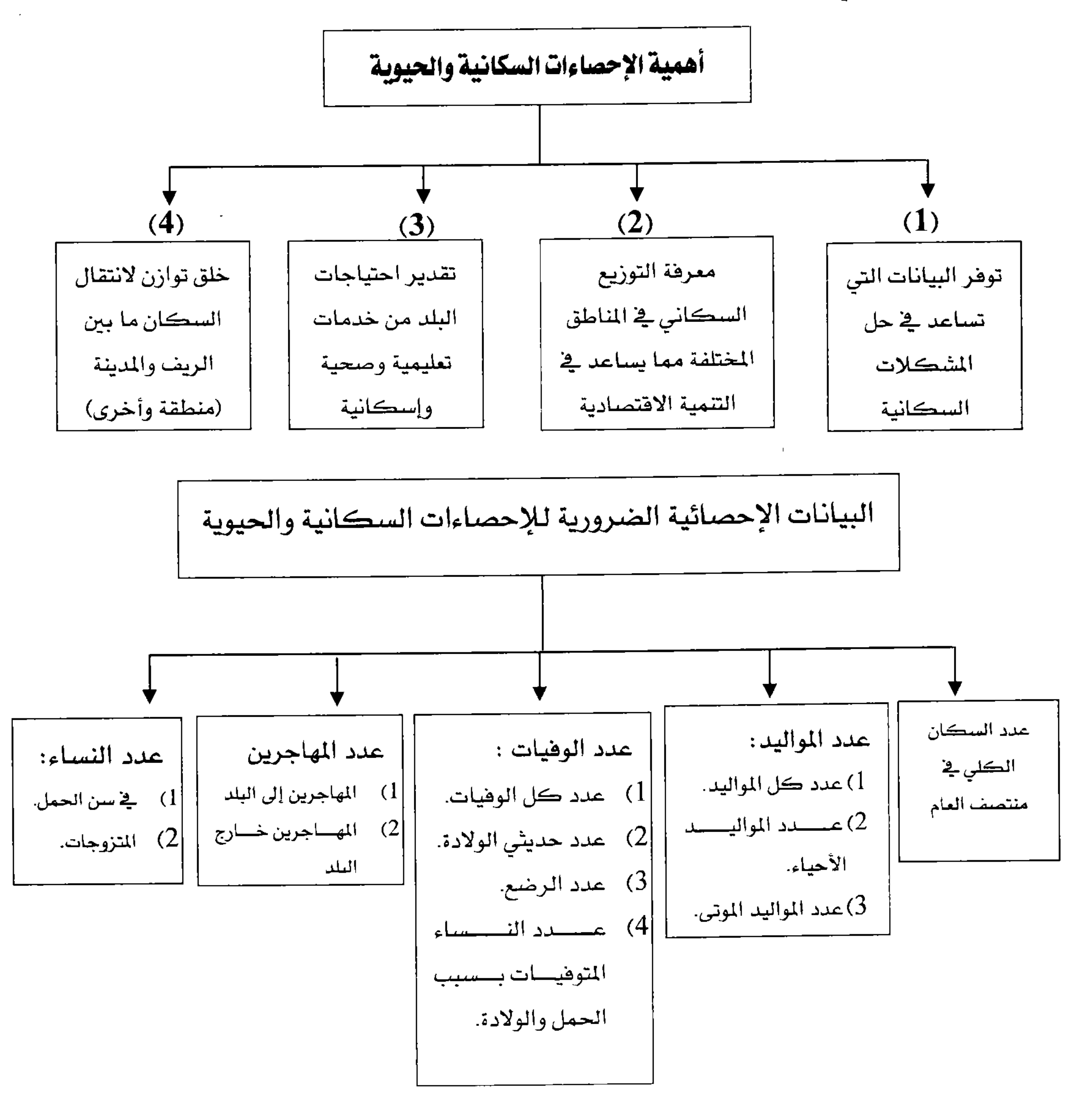


محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
8– 1	تعريف الإحصاءات السكانية والحيوية وأهميتها
8– 2	التقديرات السكانية
8– 3	إحصائيات الوفيات
8–4	إحصائيات الخصوبة



الإحصاءات السكانية والحيوية

تعريفها: الدراسة الإحصائية المتعلقة بالإنسان من حيث خصائصه وفعالياته والتغيرات التي تحدث له من تكاثر ووفاة وهجرة.



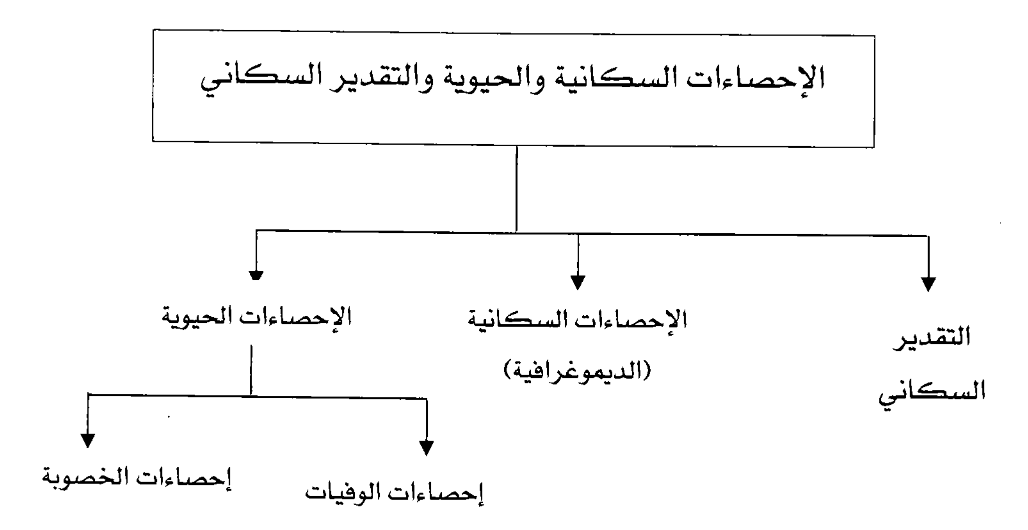
التعريفات الإجرائية المتفق عليها في هذه الوحدة:

1) الوفيات: الوفاة التي تحدث بعد الولادة وليس قبل الولادة.

2) الأطفال الرضع: هم الأطفال دون السنة وأكثر من شهر.

3) الأطفال حديثي الولادة: من الولادة وحتى (28) يوم.

4) سن الجمل بين : (15- 45) سنة.



أولاً: التقدير السكاني

يوجد عدة طرق لتقدير عدد السكان والطريقة المهمة جداً هي إيجاد علاقة خطية بين عدد السكان في سنة ما وعدد السكان في سنة أخرى وتسمى هذه العلاقة الخطية بـ : معادلة تقدير السكان الخطية . ويتم إيجادها كما يلي:

م: الزيادة السكانية السنوية (نسبة).

عن: عدد السكان في نهاية الفترة الزمنية.

ع0: عدد السكان في بداية الفترة الزمنية.

ن: طول الفترة الزمنية [النهاية – البداية].

نسبة الزيادة السكانية السنوية (م) = (عدد السكان في نهاية الفترة ($ع_ن$) – عدد السكان في بداية الفترة ($ع_0$)) / طول الفترة الزمنية (ن)

$$\frac{م}{1} = \frac{ع_ن - ع_0}{ن} \Leftrightarrow م \times ن = ع_ن - ع_0$$

$ع_ن = (م \times ن) + ع_0$ معادلة تقدير السكان

مثال: إذا كان عدد السكان في مدينة ما لسنة 1985 هو مليون نسمة إذا أصبح سكان تلك المدينة عام (1993) هو مليون وخمسين ألف نسمة احسب:

1) نسبة الزيادة السكانية بين عامي 1985، 1993.

2) معادلة تقدير عدد السكان.

3) قدّر عدد السكان لعام 1998.

الحل: 1) $م = \frac{ع_ن - ع_0}{ن} = \frac{1050000 - 1000000}{1993 - 1985} = \frac{50000}{8}$

$م = 6250$

2) $ع_ن = م_ن + ع_0$

$ع_ن = (6250)_ن + 1000000$

3) لتقدير عد السكان لسنة (1998)

البداية : 1985 ← تعطيها ترتيب (صفر) ←ن = صفر

	طريقة أخرى
1986 ← ن = 1	ن = النهاية – البداية
1987 ← ن = 2	ن = 1998 – 1985
1988 ← ن = 3	ن = 13

لتقدير عدد السكان لسنة 1998 ← أوجد $ع_ن$ عندما ن= 13

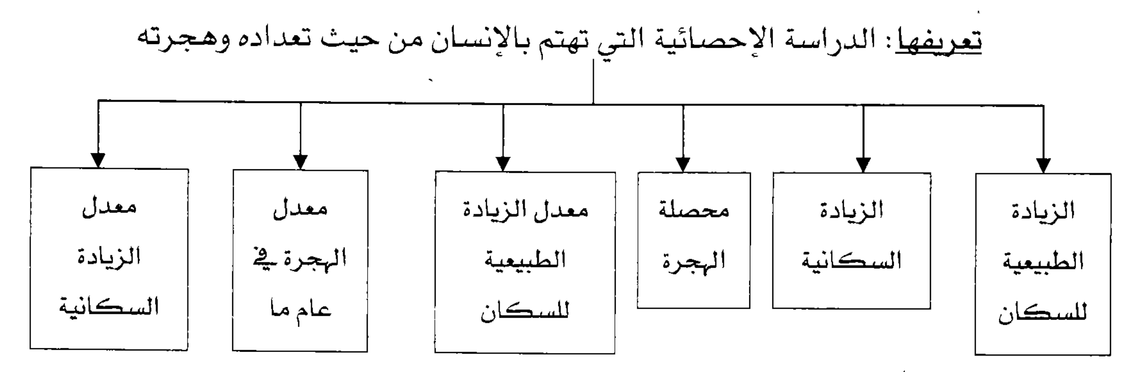
$ع_{13}$= (6250) × (13) + 1000000

= 1081250 نسمة

عدد السكان المقدر لعام 1998 = 1081250

ثانياً: الإحصاءات السكانية.

<u>تعريفها</u>: الدراسة الإحصائية التي تهتم بالإنسان من حيث تعداده وهجرته



القوانين الخاصة بالإحصاءات السكانية

1) الزيادة الطبيعة للسكان= عدد المواليد – عدد الوفيات.

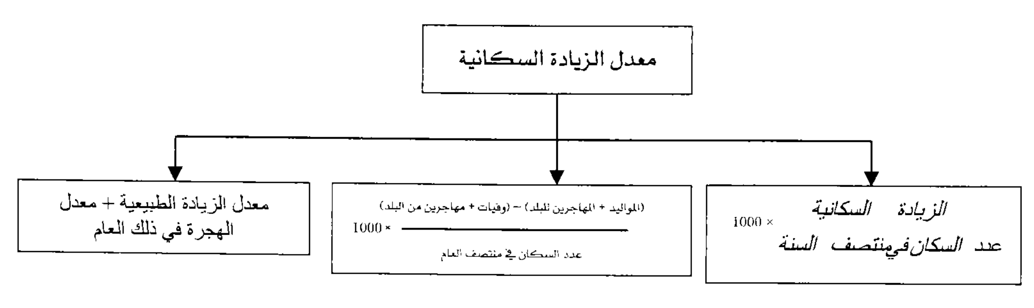
2) معدل الزيادة الطبيعية للسكان في سنة ما= $\frac{\text{الزيادة الطبيعية للسكان}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}$ ×1000.

3) محصلة الهجرة = عدد المهاجرين إلى البلد – عدد المهاجرين من البلد

4) الزيادة السكانية = الزيادة الطبيعة للسكان + محصلة الهجرة.

5) معدل الهجرة في سنة ما = $\frac{\text{محصلة الهجرة في تلك السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}$ ×1000

6) معدل الزيادة السكانية = $\frac{\text{الزيادة السكانية}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}}$ × 1000



سؤال (؟) : ما هي المؤثرات على الزيادة الطبيعة للسكان [سؤال ذاتي].

مثال: إذا كان عدد المواليد في إحدى البلدان (291000) نسمة وعدد الوفيات (109000) نسمة وعدد السكان في منتصف السنة هو (9005800) ما هو معدل الزيادة الطبيعية.

الحل: معدل الزيادة الطبيعية = $\frac{\text{الزيادة الطبيعية}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$

معدل الزيادة الطبيعية = $\frac{\text{عدد المواليد} - \text{عدد الوفيات}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000 = \frac{109000 - 291000}{900580} \times 1000$

$= 202.1 \approx 202$ لكل ألف

مثال: إذا كان عدد المواليد الأحياء في إحدى البلدان في إحدى السنوات (260000) نسمة وعدد الوفيات (80000) نسمة وعدد المهاجرين إلى البلد (180000) نسمة وعدد المهاجرين من البلد (90000) نسمة فإذا كان عدد السكان في ذلك البلد في منتصف العام (12000000) أوجد.

1) معدل الزيادة الطبيعة.

2) معدل الهجرة.

3) معدل الزيادة السكانية.

الحل:

1) معدل الزيادة الطبيعية = $\frac{80000 - 260000}{12000000} \times 1000 = (15)$ لكل ألف

2) معدل الهجرة = $\frac{\text{عدد المواليد} - \text{عدد الوفيات}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$

$= \frac{90000 - 180000}{12000000} \times 1000 = 7.5$

3) معدل الزيادة السكانية = معدل الزيادة الطبيعية + معدل الهجرة

$= 15 \quad + \quad 7.5$

$= 22.5$

مثال: إذا كان عدد سكان مدينة ما سنة 1975 يساوي (500000) وأصبح عام 1990 يساوي (8000000) نسمة احسب.

1) نسبة الزيادة السكانية.
2) احسب المعادلة الخطية لتقدير عدد السكان.
3) احسب عدد السكان التقديري سنة 1995.
4) احسب عدد السكان التقديري سنة 2000.

الحل:

1) نسبة الزيادة السكانية = م = $\frac{ع_ن - ع_0}{ن} = \frac{800000 - 500000}{1990 - 1975}$

م = 20000

2) $ع_ن = ع_0 + م \times ن$

$ع_ن = 500000 + (20000) \times ن$

3) عدد السكان التقديري سنة 1995 ← جد $ع_ن$ لعام 1995

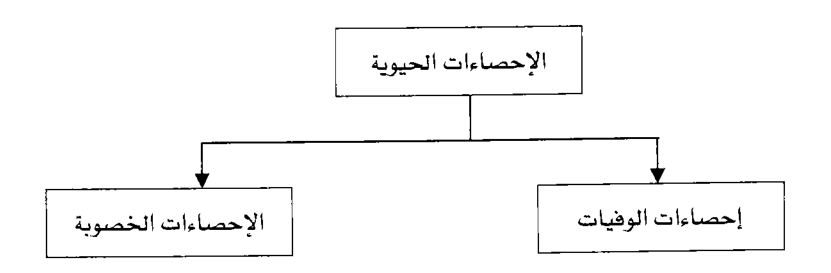
ن = 2000 – 1975 = 20

$ع_{20} = 500000 + (20000) \times 20 = 900000$

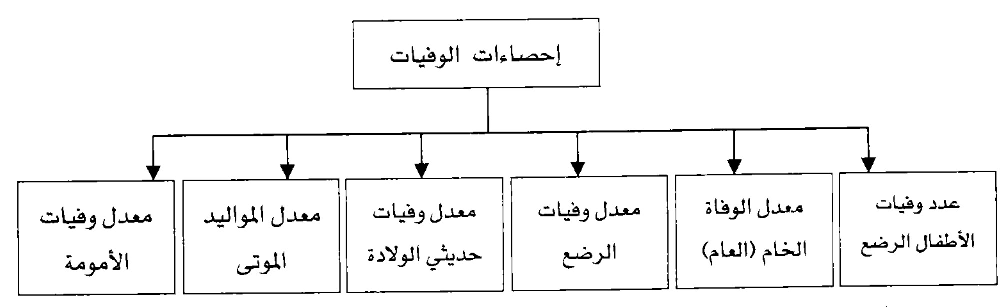
4) عدد السكان التقديري سنة 2000 ← جد $ع_ن$ لعام 2000

ن = 2000 – 1975 = 25

$ع_{25} = 500000 + (20000) \times 25 = 1000000$



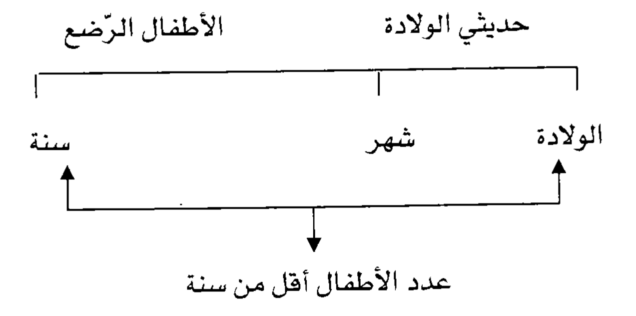
الإحصاءات الحيوية: مجموعة الأحداث التي تصيب الإنسان منذ ولادته وحتى وفاته.



إحصاءات الوفيات : الإحصاءات التي تهتم بتعدد الوفيات ببلد ما.

القوانين الخاصة بإحصاءات الوفيات

1) عدد وفيات الأطفال الرضع = عدد وفيات الأطفال أقل من سنة – عدد وفيات حديثي الولادة



2) معدل الوفاة العام (الخام) $\frac{\text{عدد الوفيات أثناء السنة}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$

3) معدل وفيات الرضع = $\frac{\text{عدد وفيات الرضع في السنة}}{\text{عدد المواليد الأحياء في تلك السنة}} \times 1000$

4) معدل وفيات حديثي الولادة = $\frac{\text{عدد وفيات حديثي الولادة}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000$

5) معدل المواليد الموتى = $\frac{\text{عدد المواليد الموتى}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000$

6) معدل وفيات الأمومة = $\frac{\text{عدد وفيات النساء بسبب الحمل أو الولادة}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000$

مثال: إذا كان عدد الوفيات في بلد ما سنة 1980 يساوي (30000) نسمة فإذا علم أن عدد السكان في منتصف السنة يساوي (20000000) نسمة فجد معدل الوفاة الخام (العام)

الحل: معدل الوفاة الخام = $\frac{30000}{20000000} \times 1000 = (1.5)$ لكل ألف.

مثال: إذا كان عدد المواليد الأحياء (225000) طفل وعدد المواليد الموتى (7500) وعدد وفيات الأطفال الأقل من سنة يساوي (4000) طفل منهم (250) طفل حديثي الولادة.

1) معدل المواليد الموتى.
2) معدل وفيات الأطفال الرضع.
3) معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة.

الحل:

1) معدل المواليد الموتى = $\frac{7500}{225000} \times 1000 = (33.3)$ لكل ألف.

2) معدل وفيات الأطفال الرضع = $\frac{\text{عدد الوفيات الرضع}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000$

= $\frac{\text{عدد الوفيات أقل من سنة} - \text{عدد وفيات حديثي الولادة}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000$

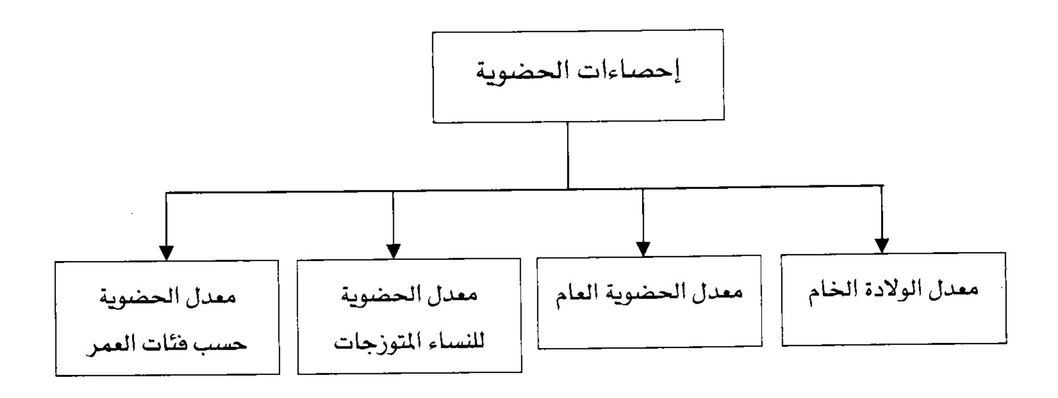
= $\frac{4000 - 250}{225000} \times 1000 = (16.7)$ لكل ألف

3) معدل وفيات حديثي الولادة = $\frac{\text{عدد وفيات حديثي الولادة}}{\text{عدد المواليد الأحياء}} \times 1000$

= $\frac{250}{225000} \times 1000 = (1.1)$ لكل ألف.

مثال: إذا كان عدد وفيات النساء بسبب الحمل أو الولادة يساوي (14000) امرأة وعدد المواليد الأحياء (225000) طفل احسب معدل وفيات الأمومة.

الحل: معدل وفيات الأمومة = $\frac{14000}{225000} \times 1000 = (62.2)$ لكل ألف.



إحصاءات الحضوية: نسبة عدد المواليد الأحياء إلى عدد النساء في سن الحمل.

1) معدل الولادة الخام = $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{\text{عدد السكان في منتصف السنة}} \times 1000$

2) معدل الحضوبة العام = $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{\text{عدد النساء في سن الحمل في منتصف السنة}} \times 1000$

3) معدل الحضوبة للنساء المتزوجات = $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء في السنة}}{\text{عدد النساء المتزوجات في منتصف السنة}} \times 1000$

4) معدل الحضوبة حسب فئات العمر = $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء للنساء في فئة عمر محددة}}{\text{عدد النساء في تلك الفئة في منتصف السنة}} \times 1000$

أمثلة متنوعة على إحصاءات الحضوبة

مثال: إذا كان عدد المواليد الأحياء في مدينة ما يساوي (1000) طفل وكان عدد السكان (400000) نسمة احسب معدل الولادة الخام.

الحل: معدل الولادة الخام = $\frac{1000}{400000} \times 1000 = (2.5)$ لكل ألف.

مثال: إذا كان عدد المواليد الأحياء في سنة ما (4000) طفل وكان عدد النساء في سن الحمل في منتصف العام (40000) امرأة فجد معدل الحضوبة.

الحل: معدل الحضوبة = $\frac{4000}{40000} \times 1000 = (100)$ لكل ألف.

مثال: إذا كان عدد المواليد الأحياء (2000) طفل وعدد النساء المتزوجات في منتصف السنة يساوي (200000) امرأة جد معدل الحضوبة للنساء والمتزوجات.

الحل: معدل الحضوبة للنساء المتزوجات = $\frac{2000}{200000} \times 1000 = (10)$ لكل ألف.

مثال: الجدول التالي يبين فئات العمر وعدد النساء وعدد المواليد الأحياء لكل فئة.

فئات	عدد النساء	عدد المواليد الأحياء
15– 20	30000	1500
21–30	60000	6000

1) معدل الحضوبة للفئة العمرية 15–20
2) معدل الحضوبة للفئة العمرية 21–30
3) معدل الحضوبة للفئة العمرية 15–30 (معدل الحضوبة العام)

الحل :

1) معدل الحضوبة للفئة 15–20 = $\frac{1500}{30000} \times 1000$

= (50) لكل ألف.

2) معدل الحضوبة للفئة 21–30= $\frac{6000}{60000} \times 1000$

= (100) لكل ألف.

3) معدل الحضوبة للفئة 15–30= $\frac{6000+1500}{60000+30000} \times 1000$

= $\frac{7500}{90000} \times 1000$

(83.3) لكل ألف

1) إذا كان عدد المواليد الأحياء لدولة ما خلال عام 1995 هو (800000) مولود حي وكان تقدير عدد النساء اللواتي في سن الحمل (15- 49) في منتصف نفس العام (12500000) جد معدّل الحضوبة العام؟

2) إذا علمت أن عدد وفيات النساء أثناء الحمل والولادة (12400) وعدد المواليد الأحياء (250000) طفل وعدد المواليد الموتى (7500) طفل و عدد وفيات الأطفال الرضع الأقل من سنة (5000) طفل منهم (200) حديثي الولادة أقل من (28) يوم والباقي طفولة مبكرة من سن 8 يوم إلى 11 أشهر أوجد :

1. معدل وفيات الأمومة.
2. معدل وفيات الأطفال الرضع.
3. معدل المواليد الموتى.
4. معدل وفيات الأطفال حديثي الولادة.
5. معدل وفيات الطفولة المبكرة.

3) من مصادر البيانات السكانية :

أ- أعداد الوظائف والمناصب الحكومية.

ب- السجلات السكانية.

ج- الزيادة في نسبة المتعلمين.

د- الزيادة في عدد المستشفيات والمراكز الصحية.

4) فقرة واحدة من التالية ليست من اختصاص الإحصاء الحيوي.

أ- حالات الزواج والطلاق.

ب- الهجرة الداخلية والخارجية.

ج- المواليد والوفيات.

د- النماء الاقتصادي.

5) إذا كان عدد المهاجرين لبلد ما مليون مهاجر وعدد المهاجرين منه مليوني مهاجر وعدد الوفيات منه مليون ونصف وعدد المواليد ثلاثة ملايين فإذا كان عدد سكان ذلك البلد في 1990/7/1 خمسة وسبعون مليون نسمة:

1. أوجد معدل الزيادة الطبيعية.
2. معدل الهجرة.
3. معدل الزيادة السكانية في ذلك العام.

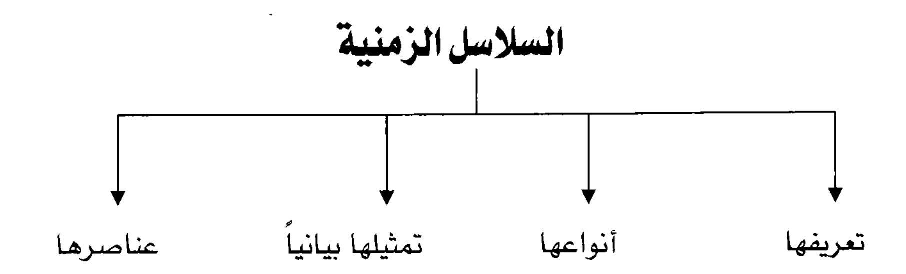
الوحدة التاسعة



محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
9– 1	مفهوم السلسة الزمنية وأنواعها
9– 2	تمثيل السلسلة الزمنية
9– 3	معامل الخشونة والمعادلات المتحركة
9– 4	مركبات السلسلة الزمنية
9– 5	تقدير مركبة الاتجاه
9– 6	تقدير المركبة الفصلية



السلاسل الزمنية

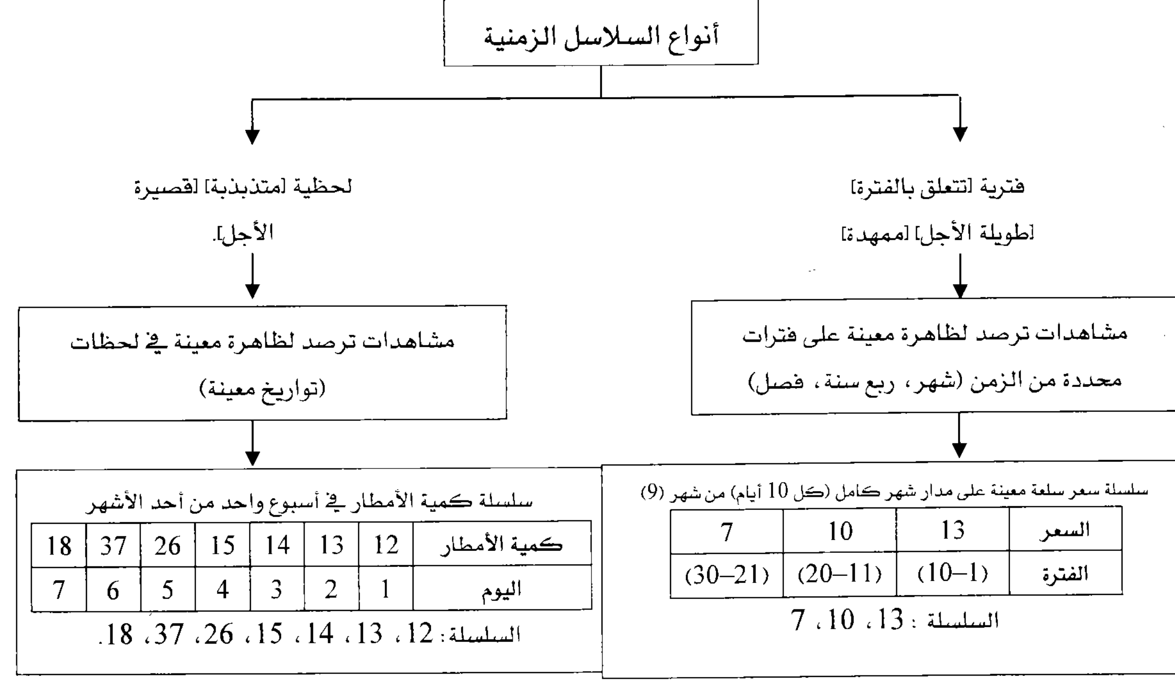


ماهيـة السلسلة الزمنيـة: عـدد مـن المشاهدات الإحصائية تصف ظاهره معنيـة مـع مـرور الـزمن أو مجموعـة مـن المشاهدات الـتي أخـذت علـى فـترات زمنيـة متلاحقـة ومتسـاوية [تفصيل تساوي الفترات الزمنية المتلاحقة].

مثال للتوضيح: أخذت سعر سلعة معينة على مدار سنة كاملة فكانت كما يلي:

سعر السلسلة بالقرش	14	18	22	26
فترة الرصد بالشهود	(3–1)	(6–4)	(9–7)	(12–10)

في المثال السابق: سلسلة أسعار السلعة هي : 14، 18، 22، 26.



سلسلة سعر سلعة معينة على مدار شهر كامل (كل 10 أيام) من شهر (9)

السعر	13	10	7
الفترة	(10–1)	(20–11)	(30–21)

السلسلة : 13، 10، 7

سلسلة كمية الأمطار في أسبوع واحد من أحد الأشهر

كمية الأمطار	12	13	14	15	26	37	18
اليوم	1	2	3	4	5	6	7

السلسلة: 12، 13، 14، 15، 26، 37، 18.

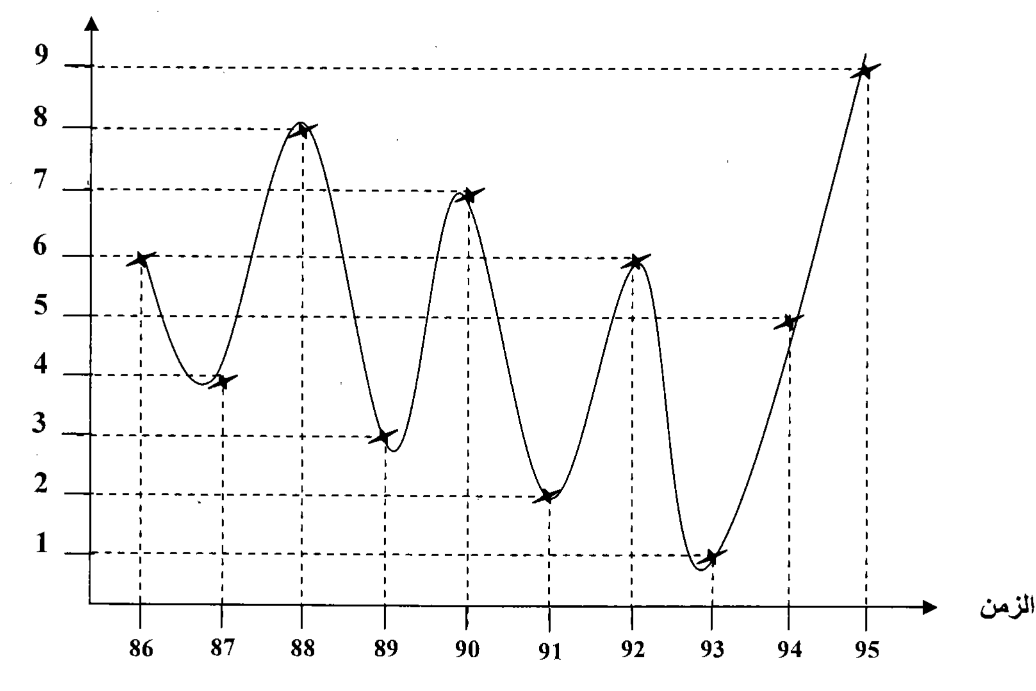
تمثيل السلسة الزمنية بيانياً

(المنحنى التاريخي للسلسلة)

- يمكن تمثيل السلسه الزمنية بيانياً بتعيين أزواج مرتبة (الزمن، قيمة الظاهرة) ثم نوصل تلك النقاط فينتج ما يعرف بالمنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية.

مثال: ارسم المنحنى التاريخي الذي يمثل السلسلة الزمنية لعدد خريجي إحدى الجامعات خلال السنوات من 86–95 في كلية من الكليات ولتخصص معين.

السنة	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
عدد الخريجين	6	4	8	3	7	2	6	1	5	9



- إذا نظرنا إلى المنحنى التاريخي للسلسلة الزمنية السابقة نرى أنها ترتفع في بعض السنوات وتنخفض في سنوات أخرى وهذا التذبذب يسمى خشونة السلسلة الزمنية.

- ولحساب الخشونة يوجد مقياس يسمى مقياس الخشونة أو معامل الخشونة .

$$\text{مقياس الخشونة (م.خ)} = \frac{\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - س_{ر-1})^2}{\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}$$

حيث أن : $س_ر$: المشاهدة رقم (ر) في السلسلة الزمنية.

ن: عدد قيم السلسلة ، ر: رتبة كل قيمة في السلسلة.

ملاحظة:	كلما كان معامل الخشونة أقل كلما كانت السلسلة الزمنية ملساء أكثر.
	يحسب معامل الخشونة للظواهر وليس للزمن
	لاحظ أن المجموع يبدأ من المشاهدة الثانية $\sum_{ر=2}^{ن}$

مثال: احسب معامل الخشونة للسلسلة: 6، 4، 8، 3، 7، 5، 6، 7، 5، 9.

الحل: $م.خ = \frac{\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - س_{ر-1})^2}{\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2}$ حيث

$\overline{س}$: الوسط الحسابي لقيم السلسلة

ن: عدد مشاهدات السلسلة.

$س_ر$: المشاهدة رقم (ر) بالسلسلة

* أولاً: نرقم مشاهدات السلسة بحيث يعطى كل مشاهدة رقم صحيح موجب ابتداءاً من (1).

القيمة : 6، 4، 8، 3، 7، 5، 6، 7، 5، 9

$س_ر$: $س_1$، $س_2$، $س_3$، $س_4$، $س_5$، $س_6$، $س_7$، $س_8$، $س_9$، $س_{10}$

ثانياً: نحسب الوسط الحسابي لمشاهدات السلسلة: $\overline{س} = \frac{\sum س}{ن}$

$$\overline{س} = \frac{6+4+8+3+7+5+6+7+5+9}{10} = \frac{60}{10} = 6$$

ثالثاً: نحسب كل من البسط والمقام في قانون معامل الخشونة سابق الذكر.

البسط: $\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - س_{ر-1})^2$	المقام: $\sum_{ر=2}^{ن} (س_ر - \overline{س})^2$ $(\overline{س} = 6)$
5–9 7–5 6–7 5–6 7–5 3–7 8–3 4–8 6–4 9 5 7 6 5 7 3 8 4 6 $(4)^2$ $(-2)^2$ $(1)^2$ $(1)^2$ $(2-)^2$ $(4)^2$ $(5-)^2$ $(4)^2$ $(2-)^2$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 16+ 4 + 1 + 1 + 4+ 16+ 25+ 16 + 4 87 =	9 5 7 6 5 7 3 8 4 6 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 6–9 6–5 6–7 6–6 6–5 6–7 6–3 6–8 6–4 ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ $(3)^2$ $(1-)^2$ $(1)^2$ $(0)^2$ $(1-)^2$ $(1)^2$ $(3-)^2$ $(2)^2$ $(2-)^2$ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ 9 + 1 + 1 + 0 + 1 + 1 + 9 + 4 + 4 30 =

إذن م.خ = $\frac{87}{30}$ = **2.9**

- من المثال السابق نلاحظ أن معامل الخشونة كبير نسبياً ولابد من تقليله وذلك عن طريق إيجاد سلسلة زمنية جديدة تحل محل السلسلة الزمنية الأصلية بحيث يكون معامل الخشونة إليها أقل من معامل الخشونة للسلسلة الأصلية.

- ويتم إيجاد السلسلة الزمنية الجديدة من خلال ما يعرف بطريقة المتوسطات المتحركة أو المعدلات المتحركة أو الأوساط المتحركة.

إيجاد عناصر سلسلة جديدة بطريقة المتوسطات المتحركة

- الطريقة تقوم على مبدأ متوسطات حسابية متتابعة لمجموعة متتابعة و متداخلة والنتيجة هي إزالة بعض التعرجات الموجودة في السلسلة الزمنية الأصلية لتقليل خشونة السلسلة الزمنية.

- لنفرض أن هناك السلسلة الزمنية: $س_1$ ، $س_2$، $س_3$، ....، $س_ن$ إذا أردنا إيجاد معدلات متحركة لها بطول (2) نقوم بالآتي:

$$\frac{س_1 + س_2}{2} ، \frac{س_2 + س_3}{2} ، \frac{س_3 + س_4}{2} ، ....$$

- لو أردنا إيجاد معدلات متحركة بطول (3) نقوم بالآتي:

$$\frac{س_1 + س_2 + س_3}{3} ، \frac{س_2 + س_3 + س_4}{3} ، \frac{س_3 + س_4 + س_5}{3} ، ....$$

- لو أردنا معدلات متحركة بطول (4) نقوم بالآتي:

$$\frac{س_1 + س_2 + س_3 + س_4}{4} ، \frac{س_2 + س_3 + س_4 + س_5}{4} ، \frac{س_3 + س_4 + س_5 + س_6}{4} ، ....$$

مثال: للسلسلة: 6، 4، 8، 3، 7، 5، 6، 7، 5، 9

قلّل معامل خشونة هذه السلسلة بإيجاد عناصر سلسلة جديدة بطريقة المتوسطات المتحركة بطول (3).

السلسلة الأصلية: 6، 4، 8، 3، 7، 5، 6، 7، 5، 9 / ن= 10



السلسلة الجديدة: $\frac{8+4+6}{3}$ ، $\frac{3+8+4}{3}$ ، $\frac{7+3+8}{3}$ ، $\frac{5+7+3}{3}$ ، $\frac{6+5+7}{3}$ ، $\frac{7+6+5}{3}$ ، $\frac{5+7+6}{3}$ ، $\frac{9+5+7}{3}$: 6، 5، 6، 5، 6، 6، 6، 7

عناصر السلسلة الزمنية الجديدة: 6، 5، 6، 5، 6، 6، 6، 7

السلسلة الأصلية	السلسلة الجديدة
6، 4، 8، 3، 7، 5، 6، 7، 5، 9	6، 5، 6، 5، 6، 6، 6، 7
ن= 10 = عدد عناصر السلسلة الأصلية	ك= عدد الأوساط المتحركة الجديدة = 8
	ل = طول الوسط المتحرك =3

العلاقة بين ن ، ك، ل

ن= ك+ ل –1

قاعدة	عدد عناصر السلسلة الأصلية = عدد الأوساط المتحركة الجديدة + طول الوسط المتحرك –1= ك+ ل–1

مثال: سلسلة عدد عناصرها (50) تم تعديلها باتجاه سلسلة جديدة بطريقة المتوسطات المتحركة بطول (5) بناء على ما سبق حدد عناصر السلسلة الجديدة (عدد الأوساط المتحركة الجديدة).

الحل: ن= 50، ل = 5، ك = ؟؟

ن= ك+ ل –1

50= ك + 5–1 ⇔ 50 = ك + 4 ⇔ ك = 46

مثال: سلسلة عدد عناصرها (50) يراد إنتاج سلسلة جديدة لتقليل معامل الخشونة مكونة من (46) عنصر بناء على ما سبق ما هو طول الوسط المتحرك المناسب:

الحل: ن = 50، ك= 46، ل=؟

ن= ك+ ل −1

50= 46 + ل−1 ⇔ 50 = 45 + ل ⇔ ل= 5

<table>
<tr><td colspan="2">ملاحظة: ما هي قيم س للسلسلة الجديدة وهل تكون نفس قيم س للسلسلة الأصلية</td></tr>
<tr><td colspan="2">أن قيم (س) للسلسلة الجديدة تتغير وتحسب كما تم حساب الأوساط المتحركة للظواهر</td></tr>
<tr><td>س: 1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10
الطول المتحرك = 3
س الجديدة = $\frac{1+2+3}{3}$ ، $\frac{2+3+4}{3}$ ، ..... ، $\frac{8+9+10}{3}$
= 2، 3، 4، ..... ، 9</td><td>السلسلة الجديدة هي
<table><tr><td>س</td><td>2</td><td>3</td><td>4</td><td>5</td><td>6</td><td>7</td><td>8</td><td>9</td></tr><tr><td>ص</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td><td>5</td><td>6</td><td>6</td><td>6</td><td>7</td></tr></table>
ملاحظة : لو نتج س الجديدة = 1.5 ≈ 1 اجزء من الواحد].</td></tr>
</table>

لنعد للمثال السابق ونحسب معامل الخشونة للسلسلة الزمنية المعدّلة (الجديدة)

السلسلة الأصلية

6، 4، 8، 3، 7، 5، 6، 7، 5،
9

م.خ = 2.9 (تم حسابه سابقاً)

السلسلة الجديدة (بطول "3")

6، 5، 6، 5، 6، 6، 6، 7

$$\bar{س} = \frac{6+5+6+5+6+6+6+7}{8}$$

$$\bar{س} = \frac{47}{8} \approx 6$$

البسط: $\sum_{ر=2}^{8} (س_ر - س_{ر-1})^2$

6	5	6	5	6	6	6	7

فروق: 1-، 1، 1-، 1، 0، 0، 1

مربعاتها: 1، 1، 1، 1، 0، 0، 1

$= 1+1+1+1+0+0+1=5$

المقام : $\sum_{ر=2}^{8} (س_ر - \bar{س})^2$

7	6	6	6	5	6	5	6
6-7	6-6	6-6	6-6	6-5	6-6	6-5	×
1	0	0	0	1-	0	1-	

$1 + 0 + 0 + 0 + 1 + 0 + 1 = 3$

$$م.خ = \frac{5}{3} = 1.6$$

لاحظ أن معامل الخشونة للجديدة أقل من معامل الخشونة الأصلي.

تمرين : إليك السلسلة الزمنية: 4، 8، 9، 10، 11

1) أوجد معامل الخشونة.

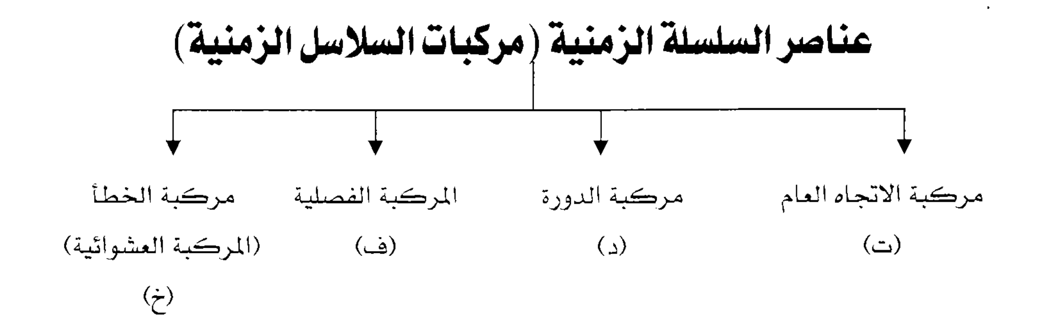
2) أوجد سلسلة جديدة عن طريق المتوسطات المتحركة بطول (2)

3) احسب معامل الخشونة للسلسلة الجديدة.

4) ارسم المنحنى التاريخي لكلا السلستين الجديدة، الأصلية.

1) معامل الخشونة	2) السلسلة الجديدة بطول متحرك للمتوسط مقداره (2)
	3) معامل الخشونة للسلسلة الجديدة
المنحنى التاريخي للسلسلة الأصلية	المنحنى التاريخي للسلسلة الجديدة

عناصر السلسلة الزمنية (مركبات السلاسل الزمنية)



العنصر	تعريفها ومثال عليها	تمثيلها بيانياً
مركبة الاتجاه العام (ت)	وتمثل المشاهدات التي تأخذ منحى متزايد مستمر مع بعض التذبذبات. مثال: ازدياد التحصيل بزيادة عدد ساعات الدراسة إلا أن هذا قد يتأثر بالتعب وقلة التركيز. وأفضل تقدير لها عن طريق معادلة خط انحدار قيمة الظاهرة (ص) على الزمن (س) ص = أ س+ ب	الظاهرة (ص) الزمن (س) الاتجاه الذي تنمو السلسلة نحوه و على المدى البعيد
مركبة الدورة (د) التغير الدوري	المشاهدات التي تتكرر كل أربع أو خمس فترات زمنية (فترة تغير البيانات لمدة طويلة قد تزيد عن السنة . مثال: 1) ارتفاع درجات الحرارة كل (5) سنوات. 2) فترة الرخاء ، فترة الكساد. [دورة التغير للمشاهدات].	الظاهرة (ص) الزمن دوره دوره

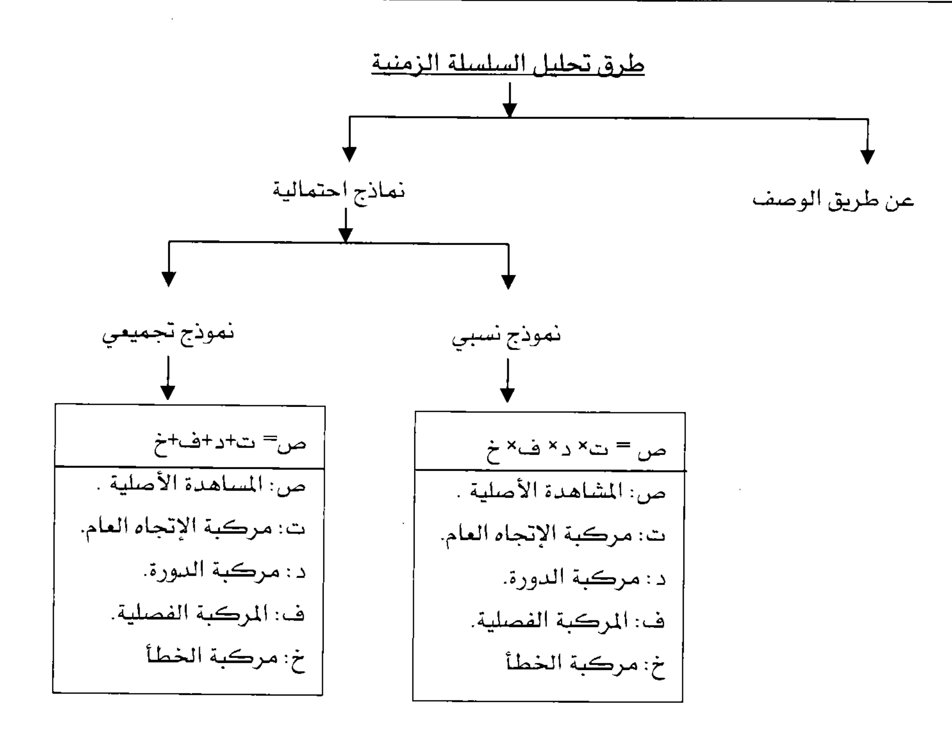
المركبة الفصلية (ف) التغير الموسمي	التغيرات التي تظهر في الفصول والفصول قد تكون يومية [درجات الحرارة] أو أسبوعية [ارتياد المساجد] [وضع النقود في البنوك] أو شهرية [الرواتب] [التغيرات المتشابهة الظاهرة بالفصول المتناظرة].	
مركبة الخطأ والذبذبات (المركبة العشوائية) (خ) التغير العرضي	المشاهدات التي تتذبذب بشكل عشوائي ويستحيل تفسيرها. مثال: الزلازل، البراكين، الحروب، الحرائق. [المركبة الخاصة بما تبقى من العوامل الأخرى التي يمكن أن تؤثر في السلسلة غير المركبات سابقة الذكر].	مركبة الخطأ والصواب

ملاحظات عامة على مركبات السلاسل الزمنية

1) أن السلسلة الزمنية الواحدة يمكن أن تتضمن أكثر من مركبة واحدة من مركبات السلاسل الزمنية (اتجاه عام، دورة، فصلية، العشوائية).

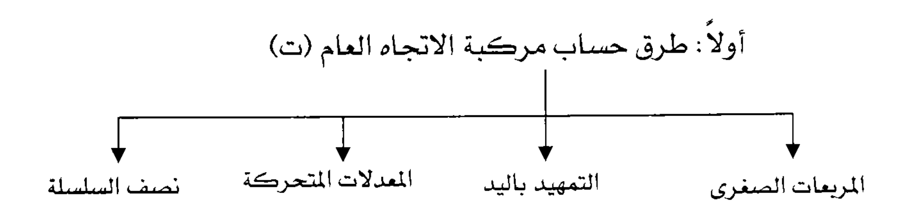
2) في كل سلسلة يهمنا معرفة تأثير كل مركبة من مركبات السلاسل الزمنية.

أهداف دراسة السلاسل الزمنية [استعمالها]



حساب مركبات السلاسل الزمنية

أولاً: طرق حساب مركبة الاتجاه العام (ت)



مثال: الجدول التالي يمثل درجات الحرارة في إحدى المدن على مدار (10) سنوات (1986 -1995).

السنة	86	87	88	89	90	91	92	93	94	95
درجة الحرارة	7	13	19	21	27	28	32	35	39	40

1) أوجد معادلة خط الاتجاه العام لكل من الطرق التالية:

أ- بالمربعات الصغرى [معادلة انحدار الظاهرة ص على الزمن س].

ب- التمهيد باليد.

ج- المعدلات المتحركة.

د- نصف السلسلة.

1) معادلة انحدار الظاهرة ص على الزمن س في [المربعات الصغرى].

وهنا نجد معادلة انحدار ص عن س كما تعلمنا في فصل الانحدار.

ص = أس + ب

(أ)	(ب)
أ= $\frac{\sum س ص - ن \bar{س} \bar{ص}}{\sum س^2 - ن (\bar{س})^2}$ أ= $\frac{\delta ص}{\delta س}$ × ر	ب= $\bar{ص} - أ \bar{س}$

$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{55}{10} = 5.5$

$\bar{ص} = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{261}{10} = 26.1$

أ = $\frac{1732 - 10 \times 5.5 \times 26.1}{385 - 10 (5.5)^2}$

أ= 3.6

ب= $\bar{ص} - أ \bar{س}$

ب = 26.1 – (3.6×5.5)= 6.3

س	س	ص(الظاهرة)	س×ص	$س^2$
86	1	7	7	1
87	2	13	26	4
88	3	19	57	9
89	4	21	84	16
90	5	27	135	25
91	6	28	168	36
92	7	32	224	49
93	8	35	280	64
94	9	39	351	81
95	10	40	400	100
مجموع	55	261	1732	385

∴ معادلة الانحدار : ص = أ س+ ب

ص = 3.6 س+ 6.3.

ملاحظة: 1) لو طلب أوجد قيمة درجة الحرارة المتوقعة في السنة الأولى

الحل: جد (ص) المقددة عندما س =1 = 1986

ص = 3.6س+6.3

ص = (3.6×1) + 6.3= 9.9.

ص = 9.9 (المقدّرة).

تذكر أن ص الحقيقية في السنة الأولى = 7 [من الجدول مباشرة].

2) أوجد قيمة ص المقدّرة سنة 1993.

الحل: جد قيمة (ص) المتوقعة عندما س = 1993=8

ص= (3.6×8) + 6.3= 35.1

3) جد قيمة درجة الحرارة المتوقعة عام 1999

الحل: جد (ص) المتوقعة عندما س = 1999=14

ص = (3.6× 14) + 6.3 ⟷ ص = 56.7

لاحظ هنا لا أستطيع معرفة قيمة (ص) الحقيقية في سنة 1999 [غير موجودة بالجدول].

1) قبل حل باقي فقرات السؤال نحتاج لأن نراجع : كتابة معادلة خط مستقيم	
كتابة معادلة مستقيم علمت نقطة عليه وميله	كتابة معادلة مستقيم مار بنقطتين معلومتين
معادلة الخط: ص− ص1 = م (س−س1) حيث : م: ميل الخط المستقيم. (س1 ، ص1) : نقطة واقعة على الخط	إذا مر المستقيم بالنقطتين (س1 ، ص1) ، (س2، ص2) فإن م = $\frac{ص2 - ص1}{س2 - س1}$ وتكتب المعادلة كما يلي أولاً: نحسب الميل (م). ثانياً: نعتمد أي نقطة من النقطتين التي يمر بهما الخط فتكون المعادلة ص − ص$_1$ = م (س− س$_1$).

مثال: أكتب معادلة خط مستقيم ميله = −3

ويمر بالنقطة (−1، −3).

الحل: م = −3، (س1، ص1) = (−1، −3)

ص − ص1 = م (س − س1)

ص _ −3 = −3 (س _ −1)

ص + 3 = −3 (س + 1)

ص + 3 = −3س − 3.

ص = −3س − 3 − 3

ص = −3س − 6 المعادلة النهائية

(↓ م)

مثال: أكتب معالة الخط المار بالنقطتين

(2، 3)، (−1، 5)

أولاً: نحسب الميل

(2 ، 3)، (−1 ، 5) حيث (س1 ، ص1)، (س2 ، ص2)

م = (ص2 − ص1) / (س2 − س1) = $\frac{5-3}{-1-2}$

م = $\frac{2}{-3}$ = $-\frac{2}{3}$

لنأخذ إحدى النقطتين

مثلاً (−1، 5)

م = $\frac{-2}{3}$ ، (−1 ، 5) (س1 ، ص1)

ص − ص1 = م (س − س1)

ص − 5 = $\frac{-2}{3}$ (س _ −1)

ص − 5 = $\frac{-2}{3}$ (س + 1)

ص − 5 = $\frac{-2}{3}$ س − $\frac{2}{3}$

ص = $\frac{-2}{3}$ س − $\frac{2}{3}$ + 5

ص = $\frac{-2}{3}$ س + $\frac{13}{3}$

2) إيجاد معادلة الاتجاه العام بطريقة التمهيد باليد

مبدأ الطريقة:

1) نرسم المنحى التاريخي للسلسلة الزمنية

2) نرسم خط مستقيم متوافق مع المنحى المرسوم في (1) بحيث يمر في أكبر عدد ممكن من النقاط المعنيه على المستوى [تحتاج لمهارة عالية بالرسم لذا فإنها طريقة غير دقيقة].

3) نختار نقطتين واقعتين على الخط المستقيم المرسوم في (2) ونكتب معادلة المستقيم المار بهما (كما في المراجعة الواردة في الصفحة السابقة).

س	86 ①	87 ②	88 ③	89 ④	90 ⑤	91 ⑥	92 ⑦	93 ⑧	94 ⑨	96 ⑩
ص	7	13	19	21	27	28	32	35	39	40

نحدد نقطتين يمر بهما الخط $(6_{س_1}، 28_{ص_1})$، $(1_{س_2}، 7_{ص_2})$

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} = \frac{7 - 28}{1 - 6} = \frac{-21}{-5}$$

$م = \frac{21}{5}$ إحدى النقطتين (1، 7)

معادلة الخط : $ص - ص_1 = م\,(س - س_1)$

$م = \frac{21}{5}$ ، $(س_1، ص_1) = (1، 7)$

$$ص - ص_1 = م\,(س - س_1)$$

$$ص - 7 = \frac{21}{5}(س - 1)$$

$$ص - 7 = \frac{21}{5}س - \frac{21}{5}$$

$$ص = \frac{21}{5}س - \frac{21}{5} + 7$$

$$ص = \frac{21}{5}س + \frac{14}{5}$$

3) إيجاد معادلة الاتجاه العام بطريقة نصف السلسلة

مبدأ عمل الطريقة:

1) نقسم السلسلة إلى نصفين متساويين وإذا كان عدد مشاهدات السلسلة فردي نحذف المشاهدة المتوسطة.

2) نجد الوسط الحسابي س، ص لكل نصف (النصف الأول / النصف الثاني)

النصف الثاني	النصف الأول
$\bar{س}_1$ ، $\bar{ص}_1$	$\bar{س}_2$ ، $\bar{ص}_2$
$(\bar{س}_1 ، \bar{ص}_1)$	$(\bar{س}_2 ، \bar{ص}_2)$

3) نجد معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين الناتجتين من الخطوة (2)

$(\bar{س}_1 ، \bar{ص}_1)$ ؛ $(\bar{س}_2 ، \bar{ص}_2)$

بما أن عدد المشاهدات في السؤال زوجي إذن:

النصف الأول

س	1	2	3	4	5
ص	7	13	19	21	27

$$\bar{س}_1 = \frac{\sum س}{ن} = \frac{5+4+3+2+1}{5} = 3$$

$$\bar{ص}_1 = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{27+21+19+13+7}{5} = 17.4$$

(3، 17.4)

النصف الثاني

س	6	7	8	9	10
ص	28	32	35	39	40

$$\bar{س}_2 = \frac{\sum س}{ن} = \frac{10+9+8+7+6}{5} = 8$$

$$\bar{ص}_2 = \frac{\sum ص}{ن} = \frac{40+39+35+32+28}{5} =$$

34.8

(8، 34.8)

نكتب معادلة الخط المستقيم المار بالنقطتين $(\underset{س_1}{3} ، \underset{ص_1}{17.4})$، $(\underset{س_2}{8} ، \underset{ص_2}{34.8})$

$$م = \frac{ص_2 - ص_1}{س_2 - س_1} =$$

إحدى النقطتين هي :

معادلة الاتجاه العام هي :

4) إيجاد معادلة الاتجاه العام بطريقة المتوسطات المتحركة

مبدأ عمل الطريقة:

1) نجد الأوساط المتحركة بطول مناسب للسلسلة لينتج لدينا سلسلة زمنية جديدة من المتوسطات المتحركة الناتجة ليكون أثر الاتجاه العام للسلسلة الجديدة ظاهر بشكل أفضل من السلسلة الأصلية.

2) نجد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الجديدة بإحدى الطرق السابقة (معادلة الانحدار، التمهيد باليد، نصف السلسلة).

السلسلة الأصلية: 7، 13، 19، 21، 27، 28، 32، 35، 39، 40

سنقوم بعمل سلسلة جديدة بوسط متحرك طوله (4) مثلاً

قيم (س) الأصلية	قيم (ص) الأصلية
1، 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8، 9، 10	7، 13، 19، 21، 27، 28، 32، 35، 39، 40
$\frac{4+3+2+1}{4}$ ، $\frac{5+4+3+2}{4}$ ،+...... $\frac{10+9+8+7}{4}$	$\frac{27+21+19+13}{4}$ ، $\frac{27+21+19+13}{4}$ ،+...... $\frac{40+39+35+32}{4}$
2.5، 3.5، 4.5، 5.5، 6.5، 7.5، 8.5.	15، 20، 23.8، 27، 30.5، 33.5، 36.5.
= 2، 3، 4، 5، 6، 7، 8	

السلسلة الجديدة

X

س	2	3	4	5	6	7	8
ص	15	20	24	27	31	34	37

X

إيجاد معادلة الاتجاه العام للسلسلة الجديدة بطريقة نصف السلسلة

النصف الأول

س	2	3	4
ص	15	20	24

$\bar{س}_1 =$

$\bar{ص}_1 =$

النصف الثاني

س	6	7	8
ص	31	34	37

$\bar{س}_2 =$

$\bar{ص}_2 =$

معادلة الاتجاه العام المار بالنقطتين (   ) ، (   )

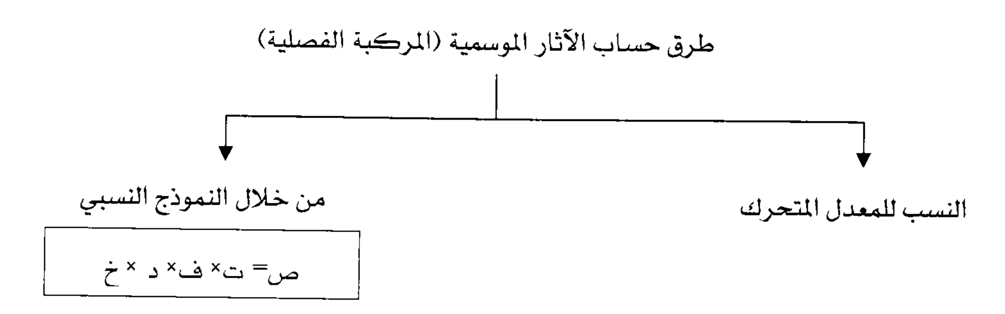
$م = \frac{ص2 - ص1}{س2 - س1} =$

إحدى النقطتين (   )

معادلة الخط المستقيم

ثانياً: تقدير المركبة الفصلية

تقدير المركبة الفصلية : إيجاد قيمة الظاهرة باعتبار المركبة الفصلية لا تتأثر إلاّ بالموسم.



أولاً: إيجاد المركبة الفصلية بطريقة النسب للمعدل المتحرك

مثال: تالياً هو إنتاج مصنع خلال (5) سنوات حيث أن كمية الإنتاج مأخوذة كل (3) شهور.

السنوات	76	77	78	79	80
ربع السنة الأول	7	12	8	20	25
ربع السنة الثاني	9	11	13	21	27
ربع السنة الثالث	10	14	15	23	28
ربع السنة الرابع	15	20	16	19	27

1) أوجد النسب الموسمية لهذا الإنتاج باستخدام فكرة النسب للمعدل المتحرك.

2) احسب المعدل الموسمي الخاص بكل ربع.

3) احسب المعدل الموسمي العام (الكلي).

القوانين

1) المعدل الموسمي = $\frac{\text{المجموع الموسمي لكل ربع}}{\text{عدد السنوات}}$ = المتوسطات الموسمية

2) المعدل الكلي = $\frac{\text{مجموع المتوسطات الموسمية}}{\text{عدد الأرباع}}$ = $\frac{\text{مجموع المجموع الكلي للمعدل الموسمي}}{\text{عدد الأرباع}}$

3) النسبة الموسمية = $\frac{\text{المعدل الموسمي}}{\text{المعدل الكلي}}$ × 100٪ = $\frac{\text{الجزء}}{\text{الكل}}$ × 100٪

الربع	المجموع الموسمي لكل ربع	المعدل الموسمي	النسب الموسمية
الأول	72 =25+20+8+12+7	$14.4 = \frac{72}{5}$	٪27.27 = ٪100× $\frac{14.4}{16.5}$
الثاني	81	$16.2 = \frac{81}{5}$	٪98.18=٪100 × $\frac{16.2}{16.5}$
الثالث	90	$18 = \frac{90}{5}$	٪109.09 =٪100 × $\frac{18}{16.5}$
الرابع	87	$17.4 = \frac{87}{5}$	٪105.45 =٪100× $\frac{17.4}{16.5}$
المجموع		66	

المعدل الكلي = $\frac{66}{4} = 16.5$

تمارين شاملة على الفصل

1) الجدول التالي يمثل سعر سلعة خلال (8) سنوات ابتداء من السنة الثانية وحتى السنة التاسعة.

السنة	2	3	4	5	6	7	8	9
سعر السلعة	45	55	65	80	90	90	100	100

– أوجد معادلة الاتجاه العام بطريقة:

أ) المربعات الصغرى.

ب) نصف السلسلة.

ت) المتوسطات المتحركة بطول مقداره (2)

– ارسم المنحنى التاريخي للسلسلة.

2) احسب معامل الخشونة للسلسلة: 3، 5، 7، 9، 11

3) إذا علمت أن القيمة الحقيقية لظاهره ما هي:

القيمة	10	8
السنة	1994	2000

وكانت القيمة المقدّرة في هذه الفترة هي:

القيمة	9.2	7.7
السنة	1994	2000

بناء على ذلك اكتب معادلة الاتجاه العام للفترة (1991– 2006).

الوحدة العاشرة





الإحتمالات

محتويات الوحدة	
الرمز	الموضوع
10- 1	الفضاء العيني
10- 2	التكرار النسبي والاحتمال
10- 3	قوانين الاحتمال والحوادث المستقلّة
10-4	الاحتمال المشروط
10-5	المتغيرات العشوائية
10-6	نظرية ذات الحدين



الاحتمالات

في هذا الفصل سيتم دراسة نوع خاص من التجارب بهدف التنبؤ بنتائجها وحصر كافة الحالات التي يمكن أن تنتج من جراء تطبيق هذه التجربة.

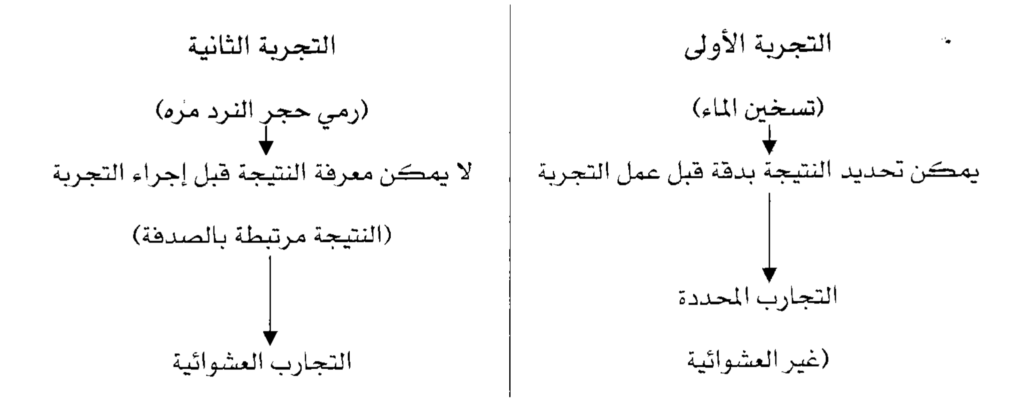
وقبل ذلك يجب أن نتعرف على أنواع التجارب وما هو النوع الذي تهتم بدراسته نظرية الاحتمالات.

نشاط: إليك التجربتين التاليتين:

التجربة الأولى: تسخين الماء وملاحظة درجة غليانه.

التجربة الثانية: رمي حجر نرد مره على الأرض وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي.

لاحظ أن هناك فوارق ما بين التجربتين من حيث النتيجة المتوقعة.



ملاحظة: نظرية الاحتمالات تهتم بدراسة التجارب العشوائية.

- لاحظ في التجربة العشوائية سابقة الذكر [رمي حجر النرد مرة واحدة] يمكننا تحديد جميع النواتج الممكنة الحصول عليها حيث أن:

الناتج من رمي حجر النرد مرة هو = { 1، 2، 3، 4، 5، 6 } وهذا ما يعرف بالفضاء العيني.

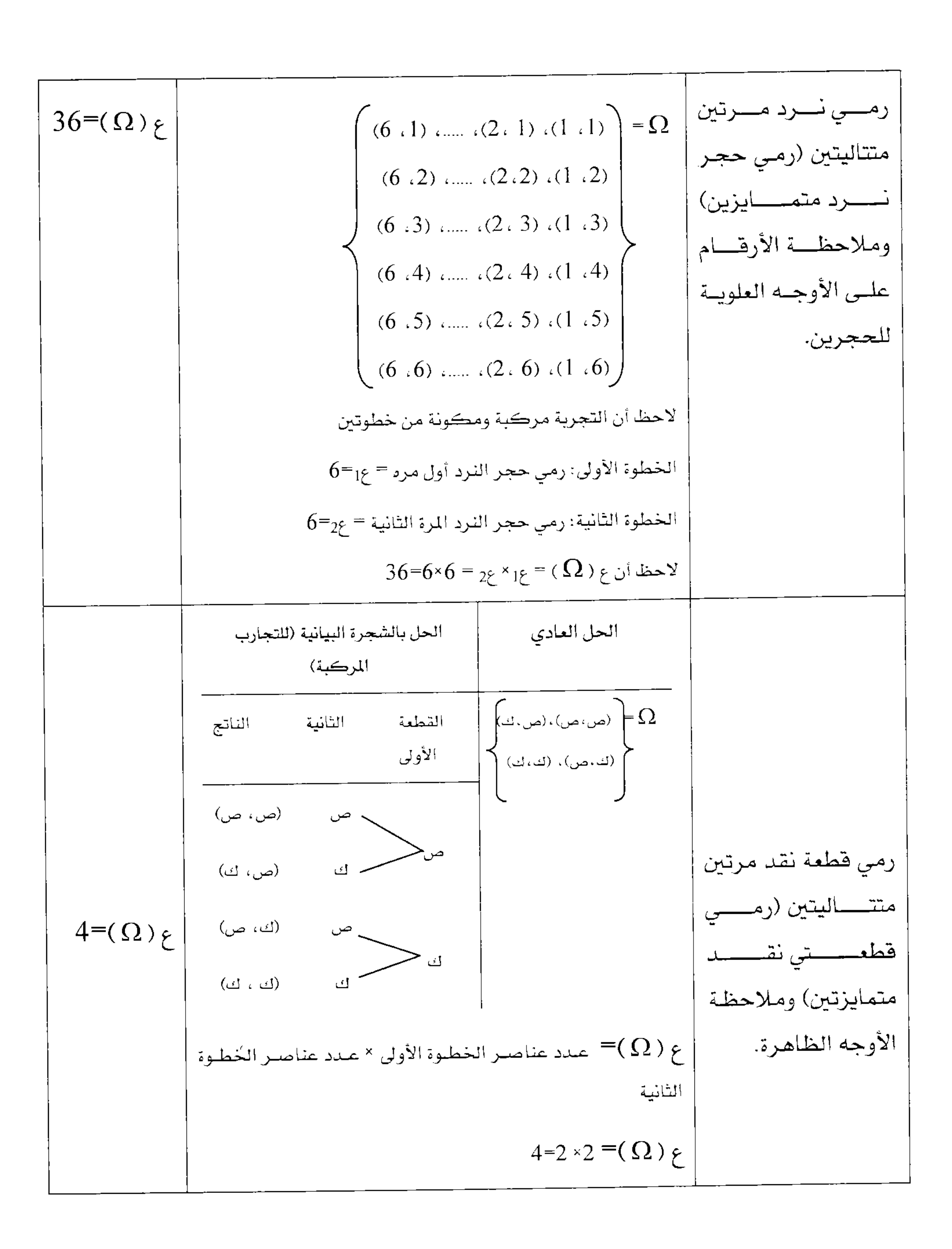
الفضاء العيني لتجربة عشوائية = مجموعة جميع النتائج التي بالإمكان أن نحصل عليها لأي تجربة ويرمز لها بالرمز (Ω)

حيث ع (Ω) = عدد عناصر الفضاء العيني لتجربة ما .

إيجاد الفضاء العيني وتحديد عدد عناصره

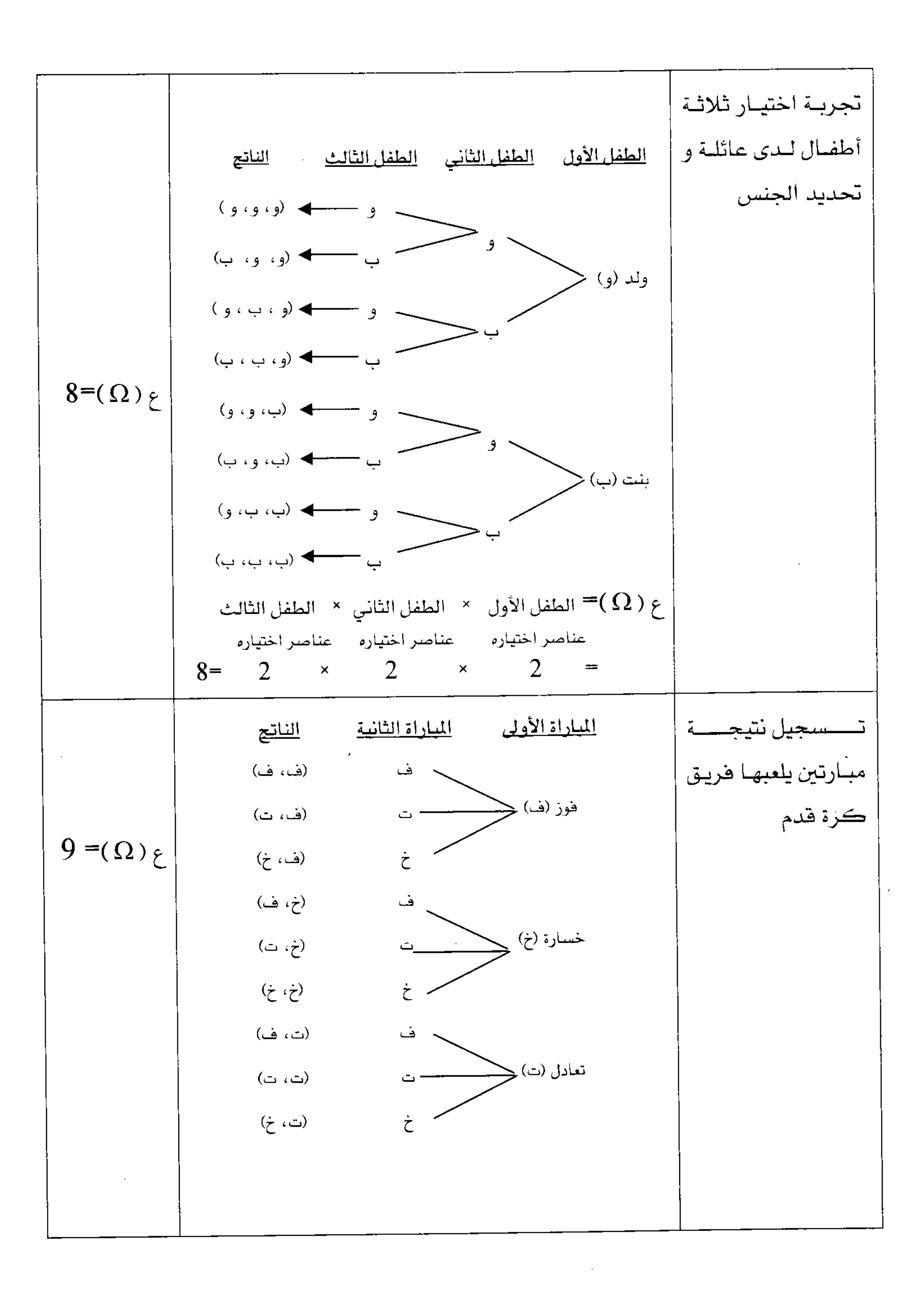
- في كل من التجارب التالية أوجد الفضاء العيني (Ω) ثم حدد عدد عناصره (ع (Ω)).

التجربة	الفضاء العيني (Ω)	ع (Ω)
رمي حجر نرد منتظم مرة واحدة وملاحظة الرقم الظاهر على الوجه العلوي	Ω= {1، 2، 3، 4، 5، 6}	ع (Ω)= 6
رمي قطعة نقد مره واحدة وملاحظة الوجه الظاهر	Ω= {صورة ، كتابة} Ω= {ص ، ك}	ع (Ω)= 2



رمي نرد مرتين متتاليتين (رمي حجر نرد متمايزين) وملاحظة الأرقام على الأوجه العلوية للحجرين.	$\Omega = \begin{Bmatrix} (1,1), (1,2), \ldots, (1,6) \\ (2,1), (2,2), \ldots, (2,6) \\ (3,1), (3,2), \ldots, (3,6) \\ (4,1), (4,2), \ldots, (4,6) \\ (5,1), (5,2), \ldots, (5,6) \\ (6,1), (6,2), \ldots, (6,6) \end{Bmatrix}$ لاحظ أن التجربة مركبة ومكونة من خطوتين الخطوة الأولى: رمي حجر النرد أول مره = $ع_1=6$ الخطوة الثانية: رمي حجر النرد المرة الثانية = $ع_2=6$ لاحظ أن ع (Ω) = $ع_1 \times ع_2$ = $6\times6=36$	ع $(\Omega)=36$
رمي قطعة نقد مرتين متتاليتين (رمي قطعتي نقد متمايزتين) وملاحظة الأوجه الظاهرة.	**الحل العادي** Ω = {(ص،ص)، (ص،ك)، (ك،ص)، (ك،ك)} **الحل بالشجرة البيانية (للتجارب المركبة)** القطعة الأولى | الثانية | الناتج ص ← ص : (ص، ص) ص ← ك : (ص، ك) ك ← ص : (ك، ص) ك ← ك : (ك، ك) ع (Ω)= عدد عناصر الخطوة الأولى × عدد عناصر الخطوة الثانية ع (Ω)= $2\times2=4$	ع $(\Omega)=4$

<table>
<tr>
<td>تجربة رمي حجر نرد ثم قطعة نقد وملاحظة الوجه والرقمين الظاهرين</td>
<td>
<table>
<tr><th>العامة</th><th colspan="3">بالشجرة البيانية</th></tr>
<tr><td></td><td>رمي الحجر</td><td>رمي النقد</td><td>الناتج</td></tr>
<tr><td rowspan="12">Ω =
{(1، ص)، (2، ص)
(3، ص)، (4، ص)
(5، ص)، (6، ص)
(1، ك)، (2، ك)
(3، ك)، (4، ك)
(5، ك)، (6، ك)}</td><td rowspan="2">1</td><td>ص</td><td>(1، ص)</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>(1، ك)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">2</td><td>ص</td><td>(2، ص)</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>(2، ك)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">3</td><td>ص</td><td>(3، ص)</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>(3، ك)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">4</td><td>ص</td><td>(4، ص)</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>(4، ك)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">5</td><td>ص</td><td>(5، ص)</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>(5، ك)</td></tr>
<tr><td rowspan="2">6</td><td>ص</td><td>(6، ص)</td></tr>
<tr><td>ك</td><td>(6، ك)</td></tr>
</table>
ع (Ω)= عدد عناصر رمي الحجر × عدد عناصر رمي النقد
= 6 × 2 = 12
</td>
<td>ع
(Ω)=12</td>
</tr>
</table>

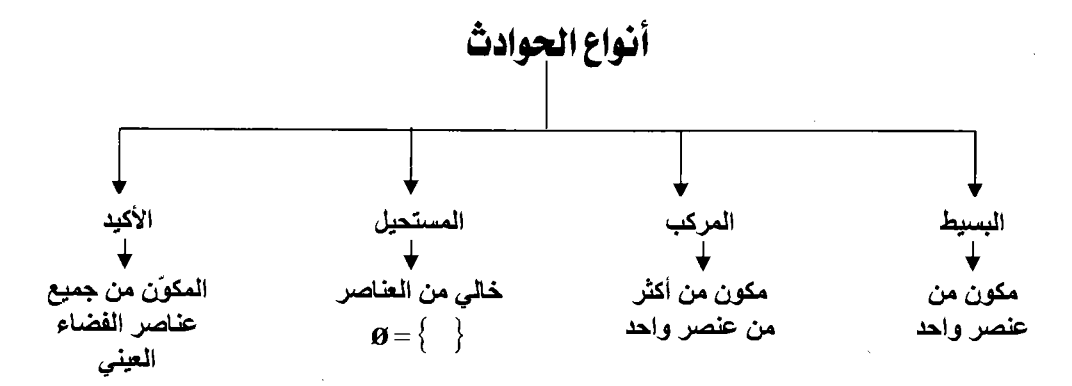


التجربة	الشجرة	ع (Ω)
تجربة اختيار ثلاثة أطفال لدى عائلة و تحديد الجنس	الطفل الأول / الطفل الثاني / الطفل الثالث / الناتج ولد (و) ← و ← و : (و، و، و) ولد (و) ← و ← ب : (و، و، ب) ولد (و) ← ب ← و : (و ، ب ، و) ولد (و) ← ب ← ب : (و، ب ، ب) بنت (ب) ← و ← و : (ب، و، و) بنت (ب) ← و ← ب : (ب، و، ب) بنت (ب) ← ب ← و : (ب، ب، و) بنت (ب) ← ب ← ب : (ب، ب، ب) ع (Ω) = الطفل الأول عناصر اختياره × الطفل الثاني عناصر اختياره × الطفل الثالث عناصر اختياره = 2 × 2 × 2 =8	ع (Ω) =8
تسجيل نتيجة مباراتين يلعبها فريق كرة قدم	المباراة الأولى / المباراة الثانية / الناتج فوز (ف) ← ف : (ف، ف) فوز (ف) ← ت : (ف، ت) فوز (ف) ← خ : (ف، خ) خسارة (خ) ← ف : (خ، ف) خسارة (خ) ← ت : (خ، ت) خسارة (خ) ← خ : (خ، خ) تعادل (ت) ← ف : (ت، ف) تعادل (ت) ← ت : (ت، ت) تعادل (ت) ← خ : (ت، خ)	ع (Ω) = 9

نتائج هامة تتعلق بعدد عناصر الفضاء العيني
1) عند إلقاء حجر نرد (ن) من المرات فإن ع (Ω)= $(6)^{ن}$
2) عند إلقاء قطعة نقد (ن) من المرات =عند إختيار (ن) من الأطفال لدى عائلة فإن ع(Ω)=$(2)^{ن}$
3) إذا لعب فريق (ن) من المباريات فإن ع (Ω)= $(3)^{ن}$

مفهوم الحادث

الحادث: مجموعة جزئية من عناصر الفضاء العيني ويرمز له بالرمز (ح).



مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة اكتب عناصر الحوادث التالية مبيناً نوع كل منها:

ح1: ظهور العدد (3)

ح2: ظهور عدد فردي

ح3: ظهور عدد أكبر من (6)

ح4: ظهور العدد (2) على الأقل

ح5: ظهور العدد (4) على الأكثر

ح6: ظهور عدد أولي

ح7: ظهور عدد من قواسم (6)

ح8: ظهور عدد فردي أو زوجي

الحل: Ω = { 1، 2، 3، 4، 5، 6 } المجموعة الكلية

ح1= {3} حادث بسيط

ح2= {1، 3، 5} ← حادث مركب

ح3={ } = ø ← حادث مستحيل [ملاحظة: لا يجوز القول {ø}]

ح4= { 2، 3، 4، 5، 6 } ← حادث مركب

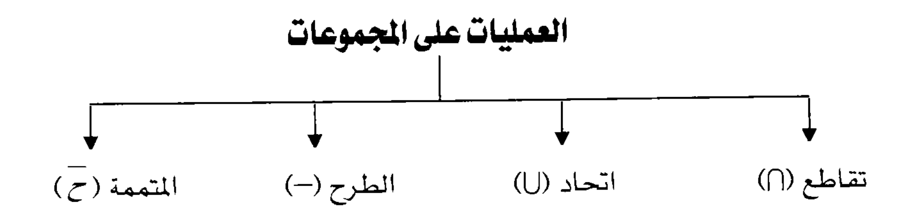
ح5= { 1، 2، 3، 4} ← حادث مركب

ح6 = { 2، 3، 5 } [العدد الأولي: الذي له قاسمان مختلفان فقط] [1 ← ليس أولي].

ح7= { 1، 2، 3، 6} ← حادث مركب

ح8= { 1، 2، 3، 4، 5، 6} ← حادث أكيد

العمليات على المجموعات



مثال: تجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات متتالية وملاحظة الأوجه الظاهرة :

ح1= ظهور صورة واحدة على الأكثر.

ح2= ظهور كتابة واحدة على الأقل.

ح3= ظهور نفس الوجه في الرميات الثلاث.

ح4= ظهور كتابتين.

ح5= ظهور الصورة في الرمية الأخيرة

بناء على ما سبق أوجد ناتج

1) $ح_1 \cap ح_5$ 2) $ح_3 \cup ح_4$ 3) $\overline{ح_2}$ 4) $ح_1 - ح_4$

5) $ح_5 - ح_3$ 6) $\overline{ح_4}$

الحل: Ω = {(ص، ص،ص)، (ك،ص،ص)، (ص،ك،ص)، (ك،ك،ص)، (ص،ص،ك)، (ك،ص،ك)، (ص،ك،ك)، (ك،ك،ك)}

$ح_1$= { (ص ك ك)، (ك ص ك)، (ك ك ص)، (ك ك ك) }

$ح_2$= = { (ص ص ك)، (ص ك ص)، (ص ك ك)، (ك ص ص)، (ك ص ك) (ك ك ص)، (ك ك ك) }

$ح_3$= { (ص ص ص)، (ك ك ك) }

$ح_4$= { (ص ك ك)، (ك ص ك)، (ك ك ص) }

$ح_5$= { (ص ص ص)، (ص ك ص)، (ك ص ص)، (ك ك ص) }

1) $ح_1 \cap ح_5$ = العناصر المشتركة بين الحادثين ح1 ، ح5= {(ك ك ص) }

2) $ح_3 \cup ح_4$= العناصر المشتركة وغير المشتركة بين الحادثين ح3، ح4 دون تكرار المشترك = { (ص ص ص)، (ك ك ك) ، (ص ك ك)، (ك ص ك)، (ك ك ص) }

3) $\overline{ح_2}$ = متممة عناصر ح2= بقية العناصر في Ω والغير موجودة في ح2 = {(ص ص ص)}

4) $ح_1 - ح_4$= العناصر الموجودة في ح1 وغير موجودة في ح4= { (ك ك ك) }

5) $ح_5 - ح_3$ = العناصر الموجودة في ح5 وغير موجودة في ح3=

= { (ص ك ص)، (ك ص ص)، (ك ك ص) }

6) $\overline{ح_4}$ = بقية العناصر في Ω والغير موجودة في ح4= {(ص،ص،ص)، (ك،ص،ص)، (ص،ك،ص)، (ص،ص،ك)، (ك،ك،ك)}

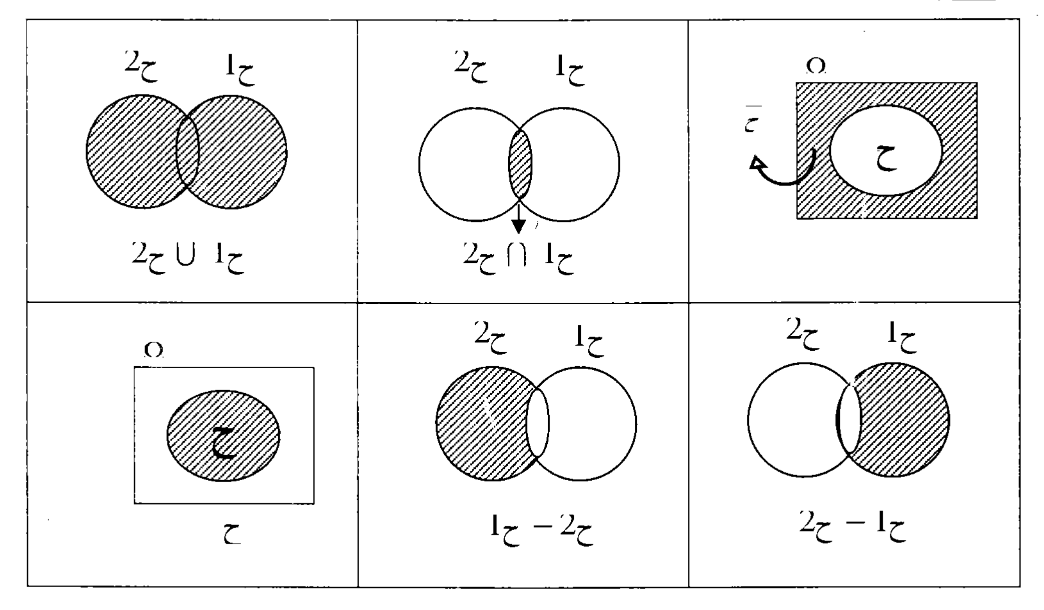
نتائج هامة على العمليات على المجموعات		
$\text{ح} \cap \bar{\text{ح}} = \emptyset$ تقاطع الحادث ومتممة دائماً يعطي $\emptyset$ (لا يوجد عناصر مشتركة بين ح، $\bar{\text{ح}}$	$\text{ح} \cup \bar{\text{ح}} = \Omega$ إتحاد الحادث ومتممه يعطي جميع عناصر الفضاء العيني (Ω)	قوانين ديمورغان $\bar{\text{أ}} \cup \bar{\text{ب}} = \overline{\text{أ} \cap \text{ب}}$ $\bar{\text{أ}} \cap \bar{\text{ب}} = \overline{\text{أ} \cup \text{ب}}$
$\text{ح}_1 - \text{ح}_2 = \text{ح}_1 \cap \bar{\text{ح}}_2$	$\text{ح}_2 - \text{ح}_1 = \text{ح}_2 \cap \bar{\text{ح}}_1$	

مجموعة من العبارات ذات الدلالة

العبارة	الدلالة	العبارة	الدلالة
وقع (ح1، ح2) معاً وقوع ح1 و ح2	$\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2$	وقوع (ح1) وعدم وقوع (ح2)	$= \text{ح}_1 \cap \bar{\text{ح}}_2$ $= \text{ح}_1 - \text{ح}_2$
وقوع ح1 أو ح2 (وقوع أحد الحادثين على الأقل)	$\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2$	عدم وقوع الحادثين معاً(عدم وقوع أي من الحادثين على الأقل)	$\overline{\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2}$
		عدم وقوع أي من الحادثين	
عدم وقوع الحادث ح1	$\bar{\text{ح}}_1$		
وقوع الحادث (ح2) وعدم وقوع الحادث (ح1)	$= \text{ح}_2 \cap \bar{\text{ح}}_1$ $= \text{ح}_2 - \text{ح}_1$		

تمثيل الحوادث في إشكال فن

أشكال فن: هي أشكال تعبر عن العملية المطلوب عملها على الحوادث وذلك بمنطقة مظللة.



مراجعة سريعة لمبدأ العد والتوافيق والتباديل (عدد الطرق الممكنة لإجراء تجربة ما)

	المضروب	التباديل	التوافيق
المفهوم			
القانون الجبري	$\text{ن}! = \text{ن}\,(\text{ن}-1)\,(\text{ن}-2)\ldots \times 1$ ن = 0، 1، 2، 3، .... = الأعداد الطبيعية = ط	$\text{ل}\,(\text{ن}\,،\,\text{ر}) = \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن}-\text{ر})!}$ حيث ن ≥ ر، ن ، ر ∈ ط	$\binom{\text{ن}}{\text{ر}} = \frac{\text{ن}\,!}{(\text{ن}-\text{ر})! \times \text{ر}!}$
مثال جبري	$5! = 5\times4\times3\times2\times1 = 120$ $4! = 4\times3\times2\times1 = 24$ $25! = 25\times24!$ $= 25\times24\times23!$	$\text{ل}\,(5\,،\,3) = \frac{5\,!}{(5-3)!} = \frac{5\,!}{2\,!}$ $= \frac{5\times4\times3\times2\,!}{2\,!} = 60$ $\text{ل}\,(9\,،\,1) = \frac{9\,!}{8\,!} = \frac{9\times8\,!}{8\,!}$ $= 9$	$\binom{5}{3} = \frac{5\,!}{(5-3)\times3\,!} = \frac{5\times4\times3\,!}{2\times3\,!}$ $= \frac{4\times5}{1\times2} = \frac{4\times5}{2} = 10$ $\binom{8}{3} = \frac{8\,!}{5\times3\,!} = \frac{8\times7\times6\times5\,!}{5\times3\,!}$ $= \frac{8\times7\times6}{3\times2\times1} = 56$
نتائج	$(1)! = 1$ $(0)! = 1$	$\text{ل}\,(\text{ن}\,،\,\text{ن}) = \text{ن}!$ $\text{ل}\,(\text{ن}\,،\,1) = \text{ن}$ $\text{ل}\,(\text{ن}\,،\,0) = 1$	$\binom{\text{ن}}{\text{ن}} = 1$ $\binom{\text{ن}}{1} = \text{ن}$ $\binom{\text{ن}}{0} = 1$

متى يكون الترتيب في التجربة مهماً أو غير مهماً

الترتيب مهم

التبديل بين الأزواج يعطي حلاً مختلفاً عن الوضع الأصلي بمعنى (أ، ب) تختلف عن (ب،أ)

تجارب فيها الترتيب مهم

1) ترتيب المنازل في العدد.
2) سحب الكرات على التوالي.
3) تحديد وظيفة شخص تم اختياره (مدير، موظف، سكرتير، .....)

الترتيب غير مهم

التبديل بين الأزواج لا يؤدي في التجربة إلى حل مختلف أي أن (أ ،ب) = (ب، أ)

تجارب ذات ترتيب غير مهم

1) سحب كرتين من صندوق دفعة واحدة.
2) اختيار طالبين للذهاب إلى أمريكا.
3) اختيار شخص من (5) بدون تحديد وظيفة خاصة بكل شخص

خلاصة هامة جداً

(تحديد طريقة العد المناسبة للتجربة)

المفهوم (طرق العد)	مبدأ العد	المضروب	التباديل	التوافيق
الترتيب	الترتيب مهم	الترتيب مهم	الترتيب مهم	الترتيب غير مهم
التكرار	مسموح أو غير مسموح	غير مسموح	غير مسموح	غير مسموح
التفسير اللفظي	عدد طرق تجربة تتم بها الخطوات بالتتابع ومكونة من أكثر من خطوة	عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء في (ن) من الأماكن مثال : ترتيب (5) طلاب في (5) مقاعد بخط مستقيم	عدد طرق ترتيب (ن) من الأشياء بأخذ (ر) بكل مرة	عدد طرق أخذ الجزء (ر) من الكل (ن)
أنواع سحب الكرات	على التوالي مع الإرجاع أو بدون إرجاع	——	على التوالي بدون إرجاع	دفعة واحدة (معاً)

تمرين شامل على طرق العد

مثال(1): بكم طريقة يمكن اختيار رئيس ونائب وسكرتير ينتخبون من بين (30) عضو:

الحل : عدد الطرق = مبدأ العد لأن الترتيب مهم (تحديد وظيفة) والتكرار غير مسموح.

عدد الطرق = طرق اختيار الرئيس× طرق اختيار النائب× طرق اختيار السكرتير.

$= 30 \times 29 \times 28$

مثال (2): بكم طريقة يمكن تكوين عدد من (3) منازل من بين الأرقام: { 1 ، 2،3،4،5 } إذا سُمح بالتكرار.

الحل: الترتيب مهم (منازل)، التكرار مسموح ← مبدأ العد.

عدد الطرق:

	أحاد	عشرات	مئات
=	5 ×	5 ×	5

= 125 طريقة

مثال(3): بكم طريقة يمكن سحب كرتين دفعة واحدة من صندوق فيه (6) كرات

الحل: الترتيب: غير مهم (دفعة واحدة)، التكرار غير مسموح ← توافيق

عدد الطرق= $\binom{6}{2} = \frac{6\,!}{4\,!\times 2\,!} = \frac{\overset{3}{6}\times 5\times \not{4}\,!}{\not{2}\times \not{4}\,!} = 15$ طريقة

مثال(4): يراد اختيار لجنة مكونة من (5) أعضاء ينتخبون من بين (10) معلمين و (30) طالب بكم طريقة يمكن.

1) اختيار اللجنة.

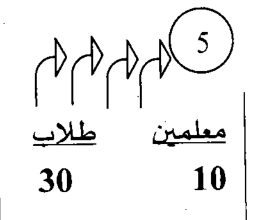
2) اختيار لجنة من معلمين و3 طلاب.

3) اختيار لجنة من (4) معلمين على الأقل.

4) اختيار لجنة من معلم واحد على الأكثر.

الحل: الترتيب غير مهم (لا توجد وظيفة) ، التكرار غير مسموح

↓ توافيق



الحل: 1) عدد الطرق = اختيار (5) من (40) ← $\binom{40}{5}$

2) عدد الطرق = $\binom{10}{2} \times \binom{30}{2}$ = عدد طرق اختيار معلمين× عدد طرق اختيار 3 طلاب.

3) عدد الطرق = 4 معلمين أو (5) معلمين = 4 معلمين وطالب + 5 معلمين دون طلاب.

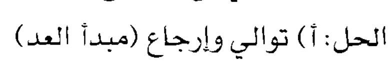
$$= \binom{10}{4} \times \binom{30}{1} + \binom{10}{5}\binom{30}{0}$$

4) عدد الطرق = معلم أو دون معلمين = معلم و 4 طلاب + 5 طلاب

$$= \binom{10}{1} \times \binom{30}{4} + \binom{30}{5}\binom{10}{0}$$

مثال (5): صندوق فيه (4) كرات مرقمة بالأرقام { 2، 3، 4، 5 } يراد سحب كرتين منه اكتب عدد الطرق التي يمكن بها سحب الكرتين إذا كان السحب.

أ- على التوالي مع الإرجاع. ب- على التوالي بدون إرجاع. جـ- دفعة واحدة.



الحل: أ) توالي وإرجاع (مبدأ العد)

= سحب الأولى × سحب الثانية.

= 4 × 4 = 16 طريقة

ب) توالي بدون إرجاع (تباديل) ن= 4، ر = 2

$$ل(4، 2) = \frac{4!}{2!} = \frac{4 \times 3 \times 2!}{2!} = 12 \text{ طريقة}$$

جـ) دفعة واحدة (توافيق) ن= 4، ر=2 (اختيار (2) من (4))

$$= \binom{4}{2} = \frac{4!}{2! \times 2!} = (6) \text{ طرق}$$

التكرار النسبي والاحتمال

تعريف: إذا أجريت تجربة عشوائية (ن) من المرات وكان عدد مرات حصول الحادث (ح) هو (م) فإن التكرار النسبي للحادث (ح) = $\frac{م}{ن}$ ويكون

الاحتمال التجريبي = ل (ح)= $\lim_{ن \to \infty} \frac{م}{ن}$ ولصعوبة حساب هذا المقدار فإننا سنتعرف على مفهوم الاحتمال المنتظم كطريقة سهلة لحساب الاحتمال.

مثال: إذا ألقي حجر نرد (30) مرة وظهر العدد (5) في (7) مرات جد الاحتمال التجريبي لظهور العدد (5).

الحل: عدد مرات إجراء التجربة = ن= 30، عدد مرات حدوث الحادث = 7

الاحتمال التجريبي للحادث = $\frac{م}{ن} = \frac{7}{30}$

تعريف : إذا كان Ω : الفضاء العيني لتجربة ما وكان.

ح: حادث في هذه التجربة فإن.

ل(ح)= احتمالات حدوث الحادث (ح) = $\frac{\text{عدد عناصر الحادث (ح)}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني}} = \frac{ع(ح)}{ع(\Omega)}$

مثال: في تجربة إلقاء حجر نرد مرة واحدة وملاحظة الرقم العلوي الظاهر كان

ح1: ظهور عدد فردي. ح2: ظهور عدد أولي.

ح3: ظهور عدد أقل من (2). ح4: ظهور العدد (2) على الأقل.

أوجد: ل(ح1)، ل(ح2)، ل(ح3)، ل(ح4)، ل(ح1∩ح2)، ل $(\overline{ح3})$، ل (ح4− ح2).

1) ل (ح1) = $\frac{ع(ح1)}{ع(\Omega)} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 2) ل (ح2) = $\frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

3) ل(ح3)= $\frac{1}{6}$ 4) ل(ح4) = $\frac{5}{6}$

5) ل(ح1∩ح2)= ؟؟ ←ح1∩ح2= { 3، 5 } ← ع (ح1∩ح2) = 2

∴ ل (ح1∩ح2) = $\frac{ع(ح1 \cap ح2)}{ع(\Omega)} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

6) ل $(\overline{ح3})$ = ؟؟ $(\overline{ح3})$ = { 2، 3، 4، 5، 6 } ← ع $(\overline{ح3})$ = 5، ل $(\overline{ح3})$ = $\frac{5}{6}$

7) ل (ح4−ح2) = ؟؟ ح4−ح2 = { 4، 6 } ← ع (ح4−ح2) = 2، ل(ح4−ح2) = $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

مثال (2): في تجربة رمي حجر نرد مرتين متتالين وملاحظة الرقمين العلويين الظاهرين.

أوجد (1) احتمال ظهور عددين متساويين.

(2) احتمال ظهور عددين زوجين.

(3) احتمال ظهور عددين مجموعهما (4).

(4) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأقل (8).

(5) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأكثر (5).

(6) احتمال ظهور عددين بحيث العدد الثاني يقسم العدد الأول.

الحل: ع (Ω) = 6× 6= 36 (لا داعي لكتابة عناصر Ω)

1) $\frac{\text{احتمال ظهور عددين متساويين}}{ح_1}$ ⇐ ل ($ح_1$) حيث $ح_1$: ظهور عددين متساويين

$ح_1 = \left\{ \begin{matrix} (1، 1)، (2، 2)، (3، 3) \\ (4، 4)، (5، 5)، (6، 6) \end{matrix} \right\}$ ← ل ($ح_1$) = $\frac{ع(ع_1)}{ع(\Omega)} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

2) احتمال ظهور عددين زوجيين = $\frac{\text{عدد مرات ظهور عددين زوجيين}}{\text{عدد عناصر }(\Omega)} = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$

3) احتمال ظهور عددين مجموعهما (4) = $\frac{3}{36} = \frac{1}{12}$

4) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأقل (8) = $\frac{15}{36} = \frac{5}{12}$

5) احتمال ظهور عددين مجموعهما على الأكثر (5) = [تمرين].

6) احتمال ظهور عددين بحيث العدد الثاني يقسم للعدد الأول = [تمرين].

مثال: تجربة اختبار عائلة مكونة من (3) أطفال جد

1) احتمال أن يكون الأطفال الثلاثة ذكور.

2) احتمال أن يكون لدى العائلة بنت واحدة على الأقل.

3) احتمال أن يكون لدى العائلة ولدين وبنت.

مثال: عند رمي قطعة نقد مرتين على التوالي جد احتمال عدم ظهور الصورة.

الحل: Ω = {(ص،ص)، (ك،ص)، (ص،ك)، (ك،ك)} ← ع (Ω) = 4

المطلوب = احتمال عدم ظهور الصورة = $\frac{\text{عدد مرات عدم ظهور الصورة}}{\text{ع}(\Omega)}$ = $\frac{1}{4}$

مثال: يحتوي كيس على (4) كرات بيضاء و (6) كرات حمراء وكرتين سوداوين سحب من الكيس كره واحدة عشوائياً.

1) جد احتمال أن تكون الكره المسحوبة حمراء.

2) جد احتمال أن تكون الكره المسحوبة سوداء.

3) جد احتمال أن تكون الكره المسحوبة غير بيضاء.

الحل: (1) ل (ح) = $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

(2) ل(ح) = $\frac{2}{12} = \frac{1}{6}$

(3) ل(ح) = حمراء أو سوداء = $\frac{6}{12} + \frac{2}{12} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$

ب	ح	س
4	6	2

مثال: يمثل الجدول التالي توزيع طلبة مدرسة ما حسب المستوى والتخصص.

	علمي	أدبي	تجاري
أول ثانوي	150	80	40
ثاني ثانوي	100	70	60

إذا تغيب أحد الطلبة عن المدرسة فما احتمال أن يكون الطالب.

أ- من الصف الثاني الثانوي.

ب- من الفرع العلمي.

ج- من الصف الأول ثانوي الأدبي.

مثال: كيس فيه (12) كره منها (4) كرات حمراء والباقي بيضاء سحب من الكيس كرتان دفعة واحدة جد احتمال.

1) أن تكون الكرتان حمراوان.

2) أن تكون الكرتان من نفس اللون.

3) أن تكون الكرتان مختلفتي اللون. 3) أن تكون إحداهما حمراء على الأقل.

الحل: ع (Ω) = سحب كرتين من الكل = $\binom{12}{2}$

ب ح
8 4

1) ل (حمراوان) = $\frac{\text{عدد طرق سحب كرتين حمراوان}}{ع\,(\Omega)} = \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}$

2) ل (نفس اللون) = ل (حمراوان) أو ل (بيضاوان) = $\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{8}{2}}{\binom{12}{2}}$

3) ل (مختلفتي اللون) = $\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}}$

4) ل (حمراء وبيضاء) + ل(حمراوان)

$$\frac{\binom{8}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{2}} + \frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}$$

مثال: مدرسة ثانوية فيها (25) معلم و (5) إداريين يراد اختيار اثنين منهم عشوائياً لمرافعة الطلبة في بعثة الحج فما احتمال أن يكون المرافقان.

أ) معلمين ب) إدارياً ومعلماً جـ) إداريين

مثال: عند تسجيل أعياد ميلاد ثلاث طلاب احسب:

1) احتمال أن تكون أعياد ميلادهم مختلفة.

2) احتمال أن يكون الطلبة الثلاثة ولدوا في أيام مختلفة من أيام الشهر.

3) احتمال أن يكونوا قد ولدوا في أشهر مختلفة.

بما أن الترتيب مهم والتكرار مسموح (مبدأ العد)

الحل: ع $(\Omega) = 365 \times 365 \times 365 = (365)^3$

1) ل(ح) = $\frac{363 \times 364 \times 365}{(365)^3}$

2) ل (ح) = $\frac{28 \times 29 \times 30}{(365)^3}$

3) ل (ح) = $\frac{10 \times 11 \times 12}{(365)^3}$

قوانين الاحتمال

أولاً : القوانين العامة [دائماً صحيحة مهما كان الحادثين ح1 ، ح2].

1) احتمال أي حادث محصور بين الصفر والواحد ⇔ 0≤ ل(ح) ≤ 1

2) احتمال الفضاء العيني = 1 ⇔ ل (Ω) = 1

3) احتمال المجموعة الخالية = صفر ⇔ ل ({ })= ل (Ø) = صفر

4) ل (ح1∪ح2)= ل (ح1) + ل (ح2) – ل (ح1∩ح2).

5) ل (ح1–ح2)= ل (ح1) –ل (ح1∩ح2).

6) ل (ح2–ح1)= ل (ح2) – ل (ح1∩ح2).

7) ل (ح) + ل ($\bar{ح}$) = ل (Ω) = 1.

ثانياً: القوانين الخاصة [هناك شروط على الحوادث حتى يتم استخدام هذه القوانين].

أ- إذا كان ح1 ، ح2 حادثين منفصلين ينتج أن [حادثين ليس بينهما عناصر مشتركة].

1) ح1∩ح2= Ø

2) ل (ح1∩ح2) = ل (Ø) = صفر

3) ل (ح1∪ح2) = ل (ح1) + ل (ح2).

ب- إذا كانت الحوادث ح1 ، ح2، ح3، ح4 حوادث متباعدة وشاملة ينتج أن:

1) تقاطع أي حادثين منها هو Ø

2) اتحادها جميعها يعطي Ω

ح1∪ح2 ∪ح3∪ ح4 = Ω

3) ل (ح1∪ ح∪ح3∪ ح4) = 1

ج- إذا كان ح1 محتواه في ح2 (ح1 ⊂ ح2) فينتج أن:

ح1 ⊂ ح2

❖ ح1∩ح2= ح1

ل(ح1∩ح2) = ل (ح1)

❖ ح1∪ح2= ح2

ل(ح1∪ح2) = ل (ح2)

ح2 ⊂ ح1

❖ ح2∩ح1= ح2

ل(ح1∩ح2) = ل (ح2)

❖ ح1∪ح2= ح1

ل(ح1∪ح2) = ل (ح1)

د- إذا كان ح1 ، ح2 حادثين مستقلين [حدوث أحدهما لا يؤثر في نتيجة الآخر]

1) ل (ح1∩ح2) = ل(ح1) × ل (ح2)

2) ينتج أن ح1 ، $\overline{ح_2}$ ← حادثين مستقلين ل (ح1∩$\overline{ح_2}$)= ل (ح1)× ل ($\overline{ح_2}$)

$\overline{ح_1}$ ، ح2 ← حادثين مستقلين ل ($\overline{ح1}$∩ح2)= ل ($\overline{ح1}$)× ل (ح2)

$\overline{ح1}$ ، $\overline{ح2}$ ← حادثين مستقلين ل ($\overline{ح1}$∩)= ل ($\overline{ح1}$)× ل ($\overline{ح2}$)

من التجارب المستلقة ما يلي.

- إطلاق نار على هدف من قبل صيادين.
- سحب كرتين على التوالي مع الإرجاع.

تمارين متنوعة وشاملة على قوانين الاحتمالات

مثال(1) إذا كان ل (ح) = 0.6 أوجد 1) ل ($\overline{ح}$)

الحل: ل (ح) + ل ($\overline{ح}$) = 1 ⇔ 0.6 + ل($\overline{ح}$) = 1 ⇔ ل($\overline{ح}$) = 1 − 0.6 = 0.4

مثال(2): إذا كان ل (ح) = 4 ل($\overline{ح}$) جد ل (ح)

الحل: ل (ح) + ل ($\overline{ح}$) = 1   لكن 4 ل ($\overline{ح}$) = ل(ح)

4ل ($\overline{ح}$) + ل ($\overline{ح}$) = 1

$\frac{5ل(\overline{ح})}{5}$ = $\frac{1}{5}$ ⇔ ل ($\overline{ح}$) = $\frac{1}{5}$ ومنها ل (ح) = 1 − $\frac{1}{5}$ = $\frac{4}{5}$

ل (ح) = $\frac{4}{5}$

مثال(3): إذا كان ل ($\overline{ح1 \cap ح2}$) = 0.9 جد ل (ح1 ∩ ح2)

الحل: ل (ح1 ∩ ح2) = 1 − 0.9 = 0.1

مثال(4): ل(ح2 − ح1) = 0.4 جد ل ($\overline{ح2 - ح1}$)

الحل: ل ($\overline{ح2 - ح1}$) = 1 − 0.4 = 0.6

مثال(5) : ليكن ل (ح) = 3ل($\bar{ح}$) جد ع (Ω) إذا كان ع (ح) = 75 عنصر .

الحل: ل(ح) = $\frac{ع(ح)}{ع(Ω)}$ ، ع(ح) = 75 ، نحتاج ل (ح)

ل(ح) + ل ($\bar{ح}$) =1

3ل ($\bar{ح}$) + ل($\bar{ح}$) = 1 ⟺ 4ل($\bar{ح}$) =1 ⟺ ل($\bar{ح}$) = $\frac{1}{4}$

إذن ل(ح) = 1− $\frac{1}{4}$ = $\frac{3}{4}$

ل(ح) = $\frac{ع(ح)}{ع(Ω)}$ ⟺ $\frac{3}{4}$ = $\frac{75}{ع(Ω)}$ ⟺ 3ع(Ω) = 4×75

ع(Ω) = $\frac{4 \times 75}{3}$

مثال(6) : إذا كان ح1 ، ح2 حادثين منفصلين وكان ل (ح1) = 0.2، ل ($\overline{ح_2}$)= 0.6.

أحسب : 1) ل (ح1∩ح2)   2) ل (ح1∪ح2)

الحل: 1) ل (ح1∩ح2) = صفر لأن ح1 ، ح2 منفصلين.

2) ل (ح1∪ح2)= ل(ح1) + ل(ح2) للحوادث المنفصلة

ل (ح1∪ح2) = 0.2 + 0.4= 0.6

مثال(7): ليكن ل(ح1) = 0.4، ل($\overline{ح1 \cap ح2}$)= 0.9 جد ل (ح1−ح2)

مثال (8): ل (ح2∩$\overline{ح_1}$) = 0.5 وكان ل (ح1∩ح2)= 0.2، جد ل($\overline{ح_2}$)

مثال (9): إذا كان $ح_1 \subset ح_2$ وكان ل $(ح_1) = 0.4$، ل$(ح_2) = 0.6$ أوجد:

1) ل $(ح_1 \cap ح_2)$. 2) ل $(ح_1 \cup ح_2)$

3) $(ح_2 - ح_1)$ 4) ل $(ح_1 - ح_2)$

الحل: بما أن $(ح_1 \subset ح_2)$ هذا يعني أن ل $(ح_1 \cap ح_2)$ = ل $(ح_1)$

ل $(ح_1 \cup ح_2)$ = ل $(ح_2)$

1) ل $(ح_1 \cap ح_2)$ = ل $(ح_1)$ 2) ل $(ح_1 \cup ح_2)$ = ل $(ح_2)$

3) ل$(ح_2 - ح_1)$ = ل$(ح_2)$ − ل$(ح_1 \cap ح_2)$.

$= 0.6$ − ل$(ح_1)$ $= 0.6 - 0.4 = 0.2$

4) ل$(ح_1 - ح_2)$ = ل$(ح_1)$ − ل$(ح_1 \cap ح_2)$.

= ل $(ح_1)$ − ل $(ح_1)$ = صفر

مثال(10): ل $(ح_1 \cup ح_2) = 0.8$ ل $(ح_1) = 0.4$ ل$(\bar{ح}_2) = 0.3$ جد

1) ل$(ح_1 \cap ح_2)$ 2) ل$(\overline{ح_1 \cap ح_2})$ 3) ل $(ح_1 - \bar{ح}_2)$.

الحل: تذكر أن $ح_1 - ح_2 = ح_1 \cap \bar{ح}_2$ $\Leftrightarrow$ ل $(ح_1 - ح_2)$ = ل $(ح_1 \cap \bar{ح}_2)$.

ل $(ح_1 \cup ح_2)$ = ل $(ح_1)$ + ل $(ح_2)$ − ل$(ح_1 \cap ح_2)$

$0.8 = 0.4 + 0.7$ − ل$(ح_1 \cap ح_2)$

$0.8 = \frac{4}{10} + \frac{7}{10}$ − ل$(ح_1 \cap ح_2)$

$\frac{8}{10} = \frac{10}{10}$ − ل$(ح_1 \cap ح_2)$ $\Leftrightarrow$ ل$(ح_1 \cap ح_2)$ $= \frac{11}{10} - \frac{8}{10}$

1) ل$(ح_1 \cap ح_2)$ $= \frac{3}{10}$

2) ل$(\overline{ح_1 \cap ح_2})$ $= 1 -$ ل$(ح_1 \cap ح_2)$ $= 1 - \frac{3}{10} = \frac{10}{10} - \frac{3}{10} = \frac{7}{10}$

3) ل $(ح_1 - \bar{ح}_2)$ = ل $(ح_1)$ − ل$(ح_1 \cap \bar{ح}_2)$.

$= 0.4 -$ [ل$(ح_1)$ − ل $(ح_1 \cap \bar{ح}_2)$]

$= 0.4 - [0.4 - 0.3]$

$= 0.4 - 0.1 = 0.3$

مثال(11): إذا كان ح1 ، ح2، ح3، حوادث متباعده وشاملة وكان ل (ح1) = 0.3،

2ل($\bar{ح}$2)= 0.8 جد ل (ح3)

الحل: ل(ح1) = 0.3   2ل($\bar{ح}$2) = 0.8 ⇐ ل($\bar{ح}$2) = $\frac{0.8}{2}$ = 0.4 ←

ل(ح2) = 0.6

بما أن ح1 ، ح2، ح3 متباعدة وشاملة إذن ل (ح1) + ل(ح2) + ل(ح3) = 1

0.3 + 0.6 + ل(ح3)= 1

0.9 + ل(ح3) = 1

ل (ح3) = 1−0.9= 0.1

ل(ح3) = 0.1

مثال(12): إذا كانت ح1 ،ح2،ح3 متباعدة وشاملة وكان 2ل(ح1) = $\frac{3}{4}$ل(ح2) = 3ل (ح3)

جد ل(ح2)

الحل:

مثال(13): إذا كان ل(ح1) = 0.5 ، ل (ح2) = 0.7، ل (ح1∩ح2)= 0.3 جد ل (ح1∪ $\bar{ح}$2).

مثال(14): إذا كان احتمال نجاح طالب في العربي (0.8) واحتمال نجاحه في الكيمياء (0.7) واحتمال نجاحه في المادتين معاً (0.6) اوجد.

1) احتمال نجاحه في إحدى المادتين على الأقل.

2) احتمال نجاحه في إحدى المادتين فقط.

3) احتمال نجاحه في إحدى المادتين على الأكثر.

4) احتمال نجاحه في العربي وعدم نجاحه في الكيمياء.

5) احتمال عدم نجاحه في أي من المادتين.

6) احتمال نجاحه في العربي والكيمياء.

7) احتمال نجاحه في العربي فقط.

❖ نترجم المعطيات إلى دلالات رياضية.

الحل: ح1 : نجاحه في العربي ← ل(ح1) = 0.8 لاحظ أن $\overline{ح1}$: رسوبه في العربي

ح2: نجاحه في الكيمياء ← ل(ح2) = 0.7 لاحظ أن $\overline{ح2}$: رسوبه في الكيمياء احتمال نجاحه في المادتين معاً ←ل (ح1 ∩ح2) = 0.62

1) احتمال نجاحه في إحدى المادتين على الأقل ←ل (ح1∪ح2)

ل(ح1∪ح2)= ل(ح1) + ل(ح2)– ل (ح1∩ح2).

$$= 0.8 + 0.7 - 0.62$$

$$= \frac{8}{100} + \frac{7}{100} - \frac{62}{100} = \frac{80}{100} + \frac{70}{100} - \frac{62}{100}$$

$$= \frac{80 + 70 - 62}{100} = \frac{88}{100} = 0.88$$

2) احتمال نجاحه في إحدى المادتين فقط ← نجاحه في الأولى ورسوبه بالثانية أو + نجاحه بالثانية ورسوبه بالأولى= ل(ح1 ∩ $\overline{ح_2}$) + ل ($\overline{ح_1}$ ∩ح2)

ل(ح1∩ $\overline{ح2}$) = ل(ح1–ح2)

= ل(ح1) – ل(ح1∩ ح2)

$$= \frac{8}{10} - \frac{62}{100} = \frac{80 - 62}{100} = \frac{18}{100}$$

= ل($\overline{ح1}$∩ح2)= ل(ح2∩ $\overline{ح_1}$)= ل (ح2–ح1)

= ل (ح2) – ل(ح1∩ ح2)

$$= \frac{7}{10} - \frac{62}{100} = \frac{70 - 62}{100} = \frac{8}{100}$$

إذن احتمال نجاحه في إحدى المادتين فقط = $\frac{18}{100} + \frac{8}{100} = \frac{62}{100} = 0.26$

3) احتمال نجاحه في إحدى المادتين على الأكثر = نجاحه في إحدى المادتين فقط أو رسوبه بالمادتين معاً.

= 0.26 (المطلوب السابق) + ل($\overline{ح1 \cap ح2}$)

= 0.26 + (1−0.26)

= 0.26 + 0.38 = $\frac{64}{100}$ = 0.64

4) احتمال نجاحه في العربي و عدم نجاحه في الكيمياء = ل(ح1 ∩ $\overline{ح2}$)

ل ح1 ∩ $\overline{ح2}$ = 0.18 [مطلوب سابق]

5) احتمال عدم نجاحه في أي من المادتين [تمرين].

6) احتمال نجاحه في العربي والكيمياء [تمرين].

7) احتمال نجاحه في العربي فقط = نجاحه في العربي ورسوبه بالكيمياء = ل(ح1 ∩ $\overline{ح2}$)

= ل(ح1−ح2) = 0.18 [مطلوب سابق].

مثال(15) : تقدم (100) طالب لامتحان الرياضيات والفيزياء فإذا نجح منهم (70) طالب بالرياضيات و(60) طالب بالفيزياء و (50) طالب بالمادتين معاً واختير طالب عشوائياً جد احتمال

1) نجاحه بالرياضيات أو الفيزياء 2) نجاحه بالرياضيات ورسوبه بالفيزياء.

3) رسوبه في الرياضيات أو الفيزياء.

الحل: العدد الكلي = 100 ، عدد الناجحين بالرياضيات = 70

عدد الناجحين بالفيزياء = 60

عدد الناجحين بالمبحثين معاً= 50

ح1 : ناجح بالرياضيات ← ل(ح1) = $\frac{ع(ح1)}{ع(\Omega)} = \frac{70}{100} = 0.70$

ح2: ناجح بالفيزياء ← ل(ح2) = $\frac{60}{100} = 0.60$

ل(ح1 ∩ ح2) = $\frac{50}{100} = 0.50$

1) نجاحه بالرياضيات أو الفيزياء = نجاحه بأحد المبحثين على الأقل= ل(ح1 ∪ ح2)

= ل(ح1) + ل(ح2)− ل(ح1 ∩ ح2) = $\frac{70}{100} + \frac{60}{100} - \frac{50}{100} = \frac{80}{100} = 0.80$

2) نجاحه بالرياضيات ورسوبه بالفيزياء = ل (ح1 ∩ $\overline{ح2}$) = ل (ح1− ح2)

= ل(ح1) − ل(ح1 ∩ ح2) = $\frac{70}{100} - \frac{50}{100} = \frac{20}{100} =$ 0.20

3) رسوبه في الرياضيات أو الفيزياء = ل ($\overline{ح1 ∪ ح2}$) = 1− ل (ح1 ∪ ح2)

= 1 − 0.80 = 0.20

مثال: إذا كان ل(ح1) = 0.6، ل(ح2) = 0.4، ل(ح1 ∩ ح2) = 0.24 فهل الحادثين ح1 ، ح2 مستقلين أم لا .

الحل: إذا كان ح1 ، ح2 مستقلين يجب أن يكون ل (ح1 ∩ ح2) = ل (ح1) × ل(ح2).

ل(ح1 ∩ ح2) ؟= ل(ح1) × ل(ح2)

0.24 ؟= 0.6 × 0.4

$\frac{24}{100} = \frac{6}{10} \times \frac{4}{10}$ ✓ إذن ح1 ، ح2 مستقلين

مثال: ل(ح1) = 0.7 ، ل (ح2) = 0.4، ل(ح1∪ح2) = 0.8، هل ح1 ، ح2 مستقلين:

الحل: ل(ح1∪ح2) = ل(ح1) + ل(ح2)– ل(ح1∩ ح2)

$\frac{8}{10} = \frac{7}{10} + \frac{4}{10} -$ ل(ح1∩ح2)

$\frac{8}{10} = \frac{11}{10} -$ ل(ح1∩ح2) ⟺ ل(ح1∩ح2) $= \frac{11}{10} - \frac{8}{10} = \frac{3}{10} = 0.3$

وحتى يكون ح1 ، ح2 مستقلين نفحص فيما إذا كان ل(ح1∩ح2)= ل(ح1) × ل(ح2)

$\frac{3}{10} \stackrel{?}{=} \frac{7}{10} \times \frac{4}{10}$

$= \frac{3}{10} \neq \frac{28}{10}$ ليسا مستقلين

مثال: إذا كان ح1 ،ح2 حادثين مستقلين بحيث ل (ح1∩ح2) = 0.4، ل(ح2) = 0.9 وجد ل($\overline{ح_1}$)

الحل: بما أن ح1 ، ح2 مستقلين إذن ل (ح1∩ح2)= ل(ح1) × ل(ح2)

0.4 = ل(ح1) × 0.9

$\frac{4}{10} =$ ل(ح1) × $\frac{9}{10}$ بضرب الطرفين في $\frac{10}{9}$

$\frac{4}{10} \times \frac{10}{9} =$ ل(ح1) ⟺ ل(ح1) $= \frac{4}{9}$

ومنها ل($\overline{ح_1}$) $= 1 - \frac{4}{9} = \frac{9}{9} - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$

مثال: ح1 ، ح2 حادثين مستقلين حيث ل(ح2) = 0.6 ل(ح1∪ح2)=0.68، جد ل (ح1) .

الحل: بما أن ح1 ، ح2 مستقلين إذن ل (ح1∩ح2)= ل(ح1) × ل(ح2)

ل(ح1∪ح2)= ل(ح1)+ ل(ح2) – ل(ح1∩ح2)

0.68 = س + 0.6 – ل(ح1) × ل(ح2)

0.68 – 0.6= س – 0.6س

0.08 = 0.4س ⟺ س= ل(ح1) = 0.08 ÷ 0.4= $\frac{8}{100} \div \frac{4}{10} = \frac{8}{100} \times \frac{10}{4} = \frac{2}{10} = 0.2$

مثال: إذا كان احتمال إصابة أحمد ، علي ، يزن هدفاً ما يساوي (0.3/ 0.3/ 0.3) على الترتيب وإذا أطلق كل منهم طلقة واحدة على الهدف ما احتمال أن:

1) يصيب الثلاثة الهدف.

2) يصيب واحد منهم الهدف على الأقل

الحل: ح1 : إصابةِ أحمد الهدف ← ل(ح1) = 0.3

ح2 : إصابة علي الهدف ← ل(ح2) = 0.3

ح3 : إصابة يزن الهدف ← ل(ح3) = 0.3

1) احتمال إصابة الثلاثة للهدف = ل(ح1∩ح2∩ح3) وبما أنها حوادث مستقلة

إذن ل(ح1∩ح2∩ح3) = ل(ح1)× ل(ح2) × ل(ح3)

$$= 0.3 \times 0.3 \times 0.3$$

$$= \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} \times \frac{3}{10} = \frac{27}{1000} = \frac{17}{1000} = 0.027$$

2) احتمال أن يصاب الهدف من واحد على الأقل= ل(ح1∪ح2∪ح3)

= ل(ح1) + ل(ح2) + ل(ح3) – ل(ح1∩ح2∩ح3)

$$= 0.3 + 0.3 + 0.3 - 0.027$$

$$= \frac{9}{10} - \frac{27}{1000} = \frac{900}{1000} - \frac{27}{1000} = \frac{873}{1000} = 0.873$$

مثال: لدى عائلة ثلاثة أطفال إذا كان

أ : لدى العائلة أطفالاً ذكوراً وإناثاً

ب: لدى العائلة ولد واحد على الأكثر

بين فيما إذا كان الحادثان أ ، ب مستقلان أم لا

الحل:

الطفل الأول	الثاني	الثالث	الناتج
و	و	و	و و و
		ب	و و ب
	ب	و	و ب و
		ب	و ب ب
ب	و	و	ب و و
		ب	ب و ب
	ب	و	ب ب و
		ب	ب ب ب

أ= {(و و ب)، (و ب ب)، (ب و و)، (ب و ب)، (ب ب و)} ← ل(أ) = $\frac{6}{8} = \frac{3}{4}$

ب= {(و ب ب)، (ب و ب)، (ب ب و)، (ب ب ب)} ← ل(ب) = $\frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

أ∩ب= {(و ب ب)، (ب و ب)، (ب ب و)} ← ل(أ∩ب) = $\frac{3}{8}$

حتى يكون أ ، ب مستقلين نفحص فيما إذا كان ل (أ∩ب) = ل(أ)× ل(ب)

$\frac{3}{8} \stackrel{?}{=} \frac{6}{8} \times \frac{4}{8}$

$\frac{3}{8} \stackrel{?}{=} \frac{3}{4} \times \frac{1}{2}$

$\frac{3}{8} = \frac{3}{4}$ ✓ إذن الحادثين أ ، ب مستقلين

الاحتمال المشروط

هناك الكثير من الحوادث التي يشترط وقوعها بوقوع حوادث تسبقها كما بالمثال التالي:

مثال: سفر الطالب للدراسة في الخارج مرتبط بنجاحه بامتحان القبول:

ح1 : سفر الطالب في الخارج ح2: نجاحه في الامتحان.

لاحظ هنا أن (ح1) يقع بعد حدوث (ح2) أي أن (ح1) يقع بشرط وقوع (ح2) وهذا رياضياً يعبر عنه ح1 / ح2 تقرأ :

ح1/ح2 { (ح1) بشرط أن (ح2) قد وقع.
ح1 إذا علمت أن ح2 قد وقع.
ح1 إذا كان ح2 قد وقع.
ح1 على فرض أن ح2 قد وقع. }

وسنتعلم في هذا الموضوع كيف نجد احتمال الحادث المشروط بوقوع حادث قبله

تعريف: ليكن ح1 ، ح2 حادثين في Ω فإن

$$ل(ح1/ح2) = \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{ل(ح2)} \quad ، \quad ل(ح2/ح1) = \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{ل(ح1)}$$

وبشكل عام = ل (حادث/ حادث) $= \frac{\text{احتمال تقاطع الحادثين}}{\text{احتمال الحادث ما بعد الشرط}}$

مثال: إذا كان ل (ح1) = 0.8، ل(ح2)= 0.5، ل (ح1 ∩ح2) = 0.4 جد

1) ل(ح1/ح2) 2) ل (ح2/ح1) 3) ل ($\overline{ح1}$/ح2)

الحل: 1) ل (ح1/ح2) $= \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{ل(ح2)} = \frac{0.4}{0.5} = \frac{4}{5}$

2) ل (ح2/ح1) $= \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{ل(ح1)} = \frac{0.4}{0.8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

3) ل ($\overline{ح1}$/ح2) $= \frac{ل(\overline{ح1} \cap ح2)}{ل(ح1)} = \frac{ل(ح2 - ح1)}{0.5} = \frac{ل(ح2) - ل(ح1 \cap ح2)}{0.5}$

$$\text{ل}(\overline{\text{ح}_1}/\text{ح}_2) = \frac{0.4-0.5}{0.5} = \frac{0.1}{0.5} = \frac{1}{5}$$

مثال: إذا كان $\text{ل}(\overline{\text{ح}_1}) = 0.4$ ، $\text{ل}(\text{ح}_2) = 0.5$ ، $\text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = 0.8$ جد $\text{ل}(\text{ح}_1 / \overline{\text{ح}_2})$.

الحل: $$\text{ل}(\text{ح}_1 / \overline{\text{ح}_2}) = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \overline{\text{ح}_2})}{\text{ل}(\overline{\text{ح}_2})} = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 - \text{ح}_2)}{1-\text{ل}(\text{ح}_2)} = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1) - \text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{1-0.5}$$

نحتاج لإيجاد $\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) =$ ؟؟

$$\text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1) + \text{ل}(\text{ح}_2) - \text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$$

$$0.8 = 0.6 + 0.5 - \text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$$

$$\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \frac{6}{10} + \frac{5}{10} - \frac{8}{10} = \frac{3}{10}$$

$$\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = 0.3$$

$$\Leftarrow \text{ل}(\text{ح}_1 / \overline{\text{ح}_2}) = \frac{0.3-0.6}{0.5} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5}$$

مثال: إذا كان $\text{ل}(\text{ح}_2/\text{ح}_1) = \frac{2}{3}$ ، $\text{ل}(\text{ح}_1/\text{ح}_2) = \frac{4}{7}$ ، $\text{ل}(\text{ح}_1) = 0.6$ جد $\text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2)$

- $\text{ل}(\text{ح}_2/\text{ح}_1) = \frac{2}{3} = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{\text{ل}(\text{ح}_1)} \Leftrightarrow \frac{2}{3} = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{0.6}$

$$\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2) = \frac{0.6 \times 2}{3} = \frac{2}{3} \times \frac{6}{10} = \frac{2}{5}$$

- $\text{ل}(\text{ح}_1/\text{ح}_2) = \frac{4}{7} = \frac{\text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)}{\text{ل}(\text{ح}_2)} \Leftrightarrow \frac{4}{7} = \frac{\frac{2}{5}}{\text{ل}(\text{ح}_2)}$

$$4\text{ل}(\text{ح}_2) = 7 \times \frac{2}{5} = \frac{14}{5} \Leftrightarrow \text{ل}(\text{ح}_2) = \frac{14}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{14}{20}$$

$$\therefore \text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = \text{ل}(\text{ح}_1) + \text{ل}(\text{ح}_2) - \text{ل}(\text{ح}_1 \cap \text{ح}_2)$$

$$= \frac{6}{10} + \frac{14}{20} - \frac{2}{5} = \frac{8-14+12}{20} = \frac{18}{20} = \frac{9}{10}$$

إذن $\text{ل}(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = 0.9$

مثال: في تجربة سحب كرتين من صندوق فيه (5) كرات بيضاء و (7) كرات سوداء و(3) كرات حمراء إذا كان السحب على التوالي دون إرجاع أوجد.

1) احتمال أن تكون الكره الأولى بيضاء.
2) احتمال أن تكون الثانية بيضاء إذا كانت الأولى بيضاء.
3) احتمال أن تكون الثانية سوداء إذا كانت الأولى بيضاء.
4) احتمال أن تكون الأولى بيضاء والثانية بيضاء.

الحل: في هذا السؤال تم السحب على التوالي بمعنى أن الترتيب مهم وبالتالي تصبح التجربة مكونة من خطوتين تتميزين بأن حدوث السحبة الثانية مشروط بحدوث السحبة الأولى قبلها [احتمال مشروط] وبالتالي سيكون من الطبيعي دراسة احتمال السحبة الثانية بعد أن تعطى معلومات عن مجريات وقوع السحبة الأولى ولا يجوز السؤال عن احتمال السحبة الأولى وإعطاء مجريات وقوع السحبة الثانية لأن الترتيب مهم:

1) احتمال أن تكون السحبة الأولى بيضاء = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء}}{\text{عدد الكرات الكلي}} = \frac{5}{15} = \frac{1}{3}$

2) احتمال <u>الكرة الثانية</u> بيضاء <u>إذا كانت</u> <u>الأولى بيضاء</u> = ل (ح2/ح1)

ح2 / ح1

ل (ح2/ح1) = $\frac{\text{عدد الكرات البيضاء بعد أن يكون ناتج السحبة الأولى بيضاء}}{\text{عدد الكرات الكلي بعد نقصان كره بيضاء}} = \frac{4}{14}$

3) <u>احتمال الكرة الثانية سوداء</u> <u>إذا كانت</u> <u>الأولى حمراء</u>= ل (ح2/ح1)

ح2 / ح1

ل (ح2/ح1) = $\frac{\text{عدد الكرات السوداء بعد أن تكون الأولى المسحوبة حمراء}}{\text{عدد الكرات الكلي بعد نقصان كره حمراء}} = \frac{7}{14}$

4) احتمال أن تكون الأولى بيضاء و الثانية بيضاء = ل (ح1 ∩ ح2)

ح1 ∩ ح2

من قانون الاحتمال المشروط يمكن إيجاد التقاطع لأن

$$ل(ح1/ح2) = \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{ل(ح2)} \leftarrow ل(ح1 \cap ح2) = ل(ح1/ح2) \times ل(ح2) \quad ....(1)$$

$$ل(ح2/ح1) = \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{ل(ح1)} \leftarrow ل(ح1 \cap ح2) = ل(ح2/ح1) \times ل(ح1) \quad ....(2)$$

وبما أن ح1 يجب أن تأتي بعد الشرط على اعتبار أنها السحبة الأولى والتي تكون معرفة

إذن القانون المناسب هو ل (ح1 ∩ ح2)= ل (ح2/ح1) × ل (ح1)

= ل(ثانية بيضاء/ أولى بيضاء) × ل (أولى بيضاء).

$$= \frac{4}{14} \text{ (مطلوب2)} \times \frac{1}{3} \text{ (مطلوب 1)}$$

$$= \frac{4}{42}$$

مثال: إذا علمت أن احتمال نجاح طالب في امتحان هو (0.7) واحتمال سفره للخارج إذا نجح (0.6) فما احتمال نجاحه وسفره.

الحل: حتى نحدد ح1، ح2 هذا يتم من خلال العبارة المشروطة وهي

احتمال سفره للخارج إذا نجح = ل (ح2/ح1)= 0.6

ل ح2 / ح1

ح1: نجاحه بالامتحان ← ل(ح1) =0.7

ح2: سفره للخارج

المطلوب : احتمال نجاحه وسفره = ل (ح1 ∩ ح2)

$$ل(ح2/ح1) = \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{ل(ح1)} \Leftrightarrow \frac{0.6}{1} = \frac{ل(ح1 \cap ح2)}{0.7}$$

ل(ح1 ∩ ح2) = 0.6× 0.7= 0.42

مثال: إذا كان احتمال أن يتدرب فريق رياضي قبل المباراة ($\frac{1}{2}$) واحتمال فوزه إذا ($\frac{2}{3}$)

فما احتمال أن يتدرب ولا يفوز:

مثال: عينة مكونة من (20 طالب) و (30) معلم شاركوا في الإجابة عن أهمية الاقتصاد واستهلاك الطاقة فكانت إجاباتهم كما يلي:

الإجابة	نعم	لا	غير متأكد	المجموع
طلاب	14	4	2	20
معلمون	24	3	3	30

فإذا اختير أحد أفراد العينة عشوائياً فما احتمال أن يكون معلماً علماً بأن إجابته كانت نعم.

الحل: احتمال أن يكون معلماً علماً بأن إجابته كانت نعم = ل ($ح_2 / ح_1$)

$ح_2$ / $ح_1$

$ح_1$ = الإجابة كانت نعم

$ح_2$ = معلم

ل$(ح_2/ح_1) = \frac{ل(ح_1 \cap ح_2)}{ل(ح_1)}$ نحتاج لحساب ل ($ح_1 \cap ح_2$)، ل ($ح_2$)

ل($ح_1 \cap ح_2$) = احتمال أن يكون معلم وإجابته نعم = $\frac{24}{50}$

ل ($ح_2$) = احتمال أن يكون معلم = $\frac{30}{50}$

المطلوب ل$(ح_2/ح_1) = \frac{\frac{24}{50}}{\frac{30}{50}} = \frac{24}{50} \times \frac{50}{30} = \frac{24}{30} = \frac{8}{10}$

المتغيرات العشوائية المنفصلة وتوقعها

تعريف: المتغير العشوائي هو اقتران من الفضاء العيني (Ω) إلى مجموعة الأعداد الحقيقية ويرمز لها بأحد الرموز التالية: س، ص، ع ليدل على المتغير العشوائي.

مثال: عند رمي قطعة نقد مرتين إذا دل المتغير العشوائي (س): عدد الصور الظاهرة فإن :

عناصر (Ω)	عدد الصور الظاهرة
(ص، ص)	2
(ص، ك)	1
(ك، ص)	1
(ك، ك)	صفر

إذن القيم التي أخذها المتغير العشوائي (س) هي : {0، 1 ، 2} ولأن القيم قيماً معدودة فإنه يسمى المتغير العشوائي المنفصل.

- في المثال السابق كانت التجربة: رمي قطعة نقد مرتين متتاليين

المتغير العشوائي س: عدد الصور الظاهرة = {0، 1، 2}

لو أردنا إيجاد احتمال كل عنصر من عناصر المتغير عشوائي (س)

ل(س=0) = ل (عدم ظهور أي صوره) = ل (ظهور كتابتين) = $\frac{1}{4}$

ل (=1) = ل (ظهور صورة واحدة) = $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

ل (س=2) = ل (ظهور صورتين) = $\frac{1}{4}$

- لاحظ أنه يمكن عمل جدول من صفين الصف الأول قيم (س) والثاني احتمال (س) أن مثل الجدول يسمى جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س)

س	0	1	2
ل(س)	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

أو يأخذ الشكل: $\{(0، \frac{1}{4})، (1، \frac{1}{2})، (2، \frac{1}{4})\}$

ويكون دائماً مجموع احتمالات عناصر المتغير العشوائي يساوي واحد:

بالمثال السابق: ل (0) + ل(1) + ل(2) = $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{4}{4} = 1$

إذا مثل (س) متغيراً عشوائياً منفصلاً يأخذ القيم.
س: س1، س2، س3، .... س ن فإن
1) ل(س ر) : اقتران الكثافة الاحتمالية حيث ر = 1، 2، 3 ... ويكون ل(س ر) ≥ صفر
2) مجموع احتمالات عناصر المتغير العشوائي المنفصل =1
$\sum_{ر=1}^{ن}$ ل (س ر) = 1

مثال: سحبت كرتان من صندوق فيه (3) كرات حمراء وكرتين بيضاء إذا كان:

س : عدد الكرات الحمراء المسحوبة.

كوّن جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (س)

ب ح
2 3

الحل: س : عدد الكرات الحمراء المسحوبة (هناك سحبتين) = ولا كره، كره واحدة، كرتان.
0 ، 1 ، 2

س: 0، 1، 2

ل(س=0) = ل (الكرتان بيضاوان) = $\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}} = \frac{3}{10}$

ل (=1) = ل (كره بيضاء وأخرى حمراء) = $\frac{\binom{3}{1}\binom{2}{1}}{\binom{5}{2}} = \frac{6}{10}$

ل (س=2) = ل (الكرتان حمراوان) = يمكن إيجادها بدون حل لأن المجموع يجب أن =1

$\frac{3}{10}+\frac{6}{10}$ = ل (2) = 1 ⇐ ل(2) = $\frac{10}{10}-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$

جدول التوزيع الاحتمالي هو:

س	0	1	2
ل(س)	$\frac{3}{10}$	$\frac{6}{10}$	$\frac{1}{10}$

مثال: إذا كان س {1، 2، 3} وكان ل (س) = أ س^2 اقتران الكثافة الاحتمالية فجد قيمة (أ)

الحل: ل(1) + ل(2) + ل(3) = 1

ل (1) = أ(1)^2=أ

ل(2)= أ(2)^2=4أ

ل(3) = أ(3)^2= 9أ

إذن أ+ 4أ+ 9أ= 1

14أ=1 أ = $\frac{1}{14}$

توقع المتغير العشوائي المنفصل

إذا كان س متغير عشوائي يأخذ القيم س1، س2، ......، س$_ن$ وكان ل (س ر) اقتران الكثافة الاحتمالية فإن توقع (س) = ت(س) = $\sum_{ر=1}^{ن}$ س$_ر$ × ل(س$_ر$)

مثال: (س) متغير عشوائي منفصل بحيث س : 0، 1، 2 إذا علمت أن ل (س) = $\frac{1}{3}$س بناء على ذلك أوجد ت(س).

الحل: أولاً: نكون جدول التوزيع الاحتمالي

ل(0) = $\frac{1}{3}$ ×0=0

ل(1)= $\frac{1}{3}$ ×1= $\frac{1}{3}$

ل(2)= $\frac{1}{3}$ ×2= $\frac{2}{3}$

إذن توقع (س) = ت(س) = $\frac{5}{3}$

س	ل(س)	س×ل(س)
0	0	0×0=0
1	$\frac{1}{3}$	$1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$
2	$\frac{2}{3}$	$2\times\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$
مجموع		($\frac{5}{3}$)= ت (س)

نتائج هامة على التوقع	بما أن ت(س) $=\sum$ س×ل(س) إذن ت (س^2) $=\sum$ س^2× ل(س) ت(أس) = $\sum$ أس× ل(س) وخلاصة القول أنه إذا كان ص = أس +ب حيث س، ص متغيرات عشوائية منفصلة فإن ت(ص) = أ× ت(س) +ب

مثال: إذا كان ت(س) = 0.7، وكان ص = 2س –5 جد ت (ص)

الحل: ت(ص) = 2×ت(س) +5

$= (2\times 0.7) + 5$

$= \frac{14}{10} + \frac{5}{1} = \frac{14+50}{10} = \frac{64+}{10}$

مثال: الجدول التالي يمثل جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (س) بناء عليه جد ت(س)

س	1	2	4
ل(س)	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$	أ

الحل: $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} +$ أ $= 1 \Leftarrow$ أ $= \frac{3}{6}$

ت (س) $= (\frac{2}{6}\times 1) + (\frac{1}{6}\times 2) + (\frac{3}{6}\times 4) = \frac{2}{6} + \frac{2}{6} + \frac{12}{6} = \frac{16}{6} = \frac{8}{3}$

نظرية ذات الحدين

- في الكثير من التجارب يعمد الباحث على تكرار إجراء التجربة عدد كبير من المرات وذلك لرصد نجاح أو فشل ظاهرة معينة وتسمى مثل هذه التجارب تجارب ذات الحدين وسميت بذلك لأن التركيز فيها على نتيجتين (نجاح الحادث ، فشل الحادث) وتحديد عدد مرات ظهور النتيجة المرجّوة (النجاح) من العدد الكلي لمرات إجراء التجربة [تجارب برنولي].

- وقد وجدت قوانين خاصة تهتم بدراسة احتمال ظهور نتيجة النجاح لحادث ما في جزء من عدد المرات الكلي لتكرار التجربة.

> إذا قمنا بتكرار تجربة (ن) من المرات بهدف رصد عملية ظهور حادث معين فإن احتمال ظهور الحادث في جزء من عدد المرات الكلي يحسب من خلال القانون التالي.
>
> $ل(س) = \binom{ن}{س} \times (أ)^{س} \times (1-أ)^{ن-س}$ حيث
>
> ن= عدد مرات تكرار التجربة.
>
> = عدد مرات النجاح من (ن) محاولة مستقلّة ومتماثلة.
>
> أ= احتمال نجاح الحادث في المرة الواحدة [نتخيل لو أجرينا التجربة مرة واحدة فقط].
>
> 1−أ= احتمال فشل الحادث ($\bar{أ}$)
>
> يسمى : ن ، أ معاملات ذو الحدين.

مثال: إذا كان س: متغير ذو حدين معامله ن = 7، أ = $\frac{1}{3}$ جد

1) ل (س=0)
2) ل$(3 < س \le 5)$.
3) ل $(3 < س < 5)$
4) ل $(3 < س < 4)$

الحل: 1) $ل(س=0) = \binom{7}{0}\left(\frac{1}{3}\right)^{0}\left(1-\frac{1}{3}\right)^{7-0} = 1\times1 \left(\frac{2}{3}\right)^{7} = \left(\frac{2}{3}\right)^{7}$

2) $ل(3 < س \le 5) = ل(4) + ل(5)$

$$= \binom{7}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{3} + \binom{7}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^{5}\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

3) $ل(3 < س < 5) = ل(4) = \binom{7}{4}\left(\frac{1}{3}\right)^{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{3}$

4) $ل(3 < س < 4)$ = صفر

مثال: في تجربة إلقاء قطعة نقد (10) مرات احسب احتمال ظهور الصورة في (3) مرات:

الحل: ن =10، ر= 3

أ: احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة = $\frac{1}{2}$

إذن احتمال ظهور الصورة في 3 رميات = ل (3) = $\binom{10}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{10-3}$

$= \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7}$

$= \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{7+3}$

$= \binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

2) احتمال ظهور الصورة في رمية واحدة = ل(1) [تمرين]

3) احتمال ظهور الصورة = ل(0)

ل (0) = $\binom{10}{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{0}\left(\frac{1}{2}\right)^{10-0} = 1\times1\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10} = \left(\frac{1}{2}\right)^{10}$

4) احتمال ظهور الصورة على الأقل في 3 رميات = ل (س ≤3) [ن =10].[تمرين]

مثال: في تجربة رمي حجر نرد إذا أجرينا التجربة (20) مره ما هو احتمال الحصول على عدد يقبل القسمة على (3) في (6) رميات.

الحل: ن = 20، ر = 6

أ= ظهور عدد يقبل القسمة على 3 في تجربة إلقاء حجر نرد مره واحدة.

أ= $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ ومنها 1−أ= $\frac{2}{3}$

المطلوب: ل (2) = $\binom{20}{6} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{14}$

مثال: أسره لديها (5) أطفال إذا كان المتغير العشوائي س : عدد الأطفال الذكور أوجد احتمال أن يكون لدى الأسرة (3) ذكور

الحل: س: 0، 1، 2، 3، 4، 5 [كم ذكر يمكن أن يكون من بين الأطفال الخمسة].

ن = 5 ، ر= 3

أ= أن يكون المولود ذكر = $\left(\frac{1}{2}\right)$

المطلوب : ل (3) = $\binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \binom{5}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^5$

توقع ذات الحدين
إذا كان س : متغير عشوائي ذات الحدين معامله ن ، أ فإن ت(س) = ن× أ

مثال: عند رمي حجري نرد منتظمين (12) مره احسب توقع ظهور عددين متشابهين :

الحل: ن= 12 ، أ= ظهور عددين متشابهين عند رمي حجري نرد مره واحدة.

أ= $\frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

ت (س) = ن × أ = 12× $\frac{1}{6}$ = 2

مثال: ما توقع عدد الذكور في العائلة ذات الأطفال الثلاثة

الحل: ن = 3، أ = المولود ذكر = $\frac{1}{2}$

ت(س)= 3× $\frac{1}{2}$ = $\frac{3}{2}$

مثال: في توزيع ذو حدين إذا كان ن =3، أ= $\frac{1}{6}$

اكتب عناصر المتغير العشوائي (س) [تمرين]

تدريبات على الفصل

1) إذا كان ح1، ح2 حادثين في Ω وكان ل(ح1) = $\frac{8}{15}$ ، ل (ح1 $\cap$ ح2) = $\frac{1}{3}$

ل(ح1/ح2) = $\frac{4}{7}$ جد ل (ح2/$\overline{ح1}$).

2) في تجربة إلقاء حجر نرد مرتين متتاليتين اكتب التوزيع الاحتمالي للمتغير العشوائي (س) الذي يمثل عدد مرات ظهور الرقم (4) في الرميتين.

3) إذا كان س متغير عشوائي مداه {0، 1 ، 2}وكان ل (س=0) =4، ت(س) = 0.8 أوجد ل (س=1)

4) يحتوي صندوق على (6) كرات متماثلة ومرقمة بالأرقام 1 ، 1، 1 ، 2، 3، 3 سحبت كرتان على التوالي مع الإرجاع ما احتمال أن تكون الكرتان المسحوبتان تحملان الرقم (3)

5) إذا كان احتمال أن يصيب شخصان (أ ، ب) هدفاً ما هو ($\frac{1}{4}$ ، $\frac{1}{3}$) على الترتيب وكان كل منهما يصوب مره واحدة نحو الهدف فجد احتمال

أ) أن يصيب الشخص أ ، ب معاً الهدف.

ب) أن يصيب شخص واحد منهما فقط الهدف.

6) تجيب طالب بطريقة عشوائية على اختيار من نوع اختيار من متعدد يتكون من (5) أسئلة لكل سؤال هناك أربع خيارات جد احتمال أن يحصل الطالب على (5) إجابات صحيحة.

7) صندوق فيه (7 كرات حمراء) و (4 كرات بيضاء) يراد سحب عدد من الكرات منه أجب عما يلي:

أ- إذا سحبنا كره واحدة ما احتمال أن تكون حمراء

ب- إذا سحبنا من الصندوق كرتان على التوالي دون إرجاع ما احتمال أن تكون الكرتان مختلفتا اللون.

ج- إذا سحبنا من الصندوق كرتان على التولي مع الإرجاع ما احتمال أن تكو الكرتان من نفس اللون.

د- إذا سحبنا كرتان دفعة واحدة ما احتمال أن تكون الكرتان حمراوان.

ه- إذا كانت عملية سحب الكرتين دفعة واحدة ودل المتغير العشوائي على عدد الكرات البيضاء المسحوبة فكون جدول التوزيع الاحتمالي للمتغير (س).

ملحق رقم (1)

تدريبات شاملة على مساق مبادئ الإحصاء

[حل جميع أسئلة الشامل بالفترة 2003–2006]

	امتحان عام (2003) دورة تموز	
(1)	إذا كان الوسط الحسابي لقيم من المشاهدات يساوي (12) والوسيط لها يساوي (13) فإن قيمة المنوال أ) 15 ب) 13 جـ) 19 د) 16.2	الوسط – المنوال = 3(الوسط – الوسيط) 12– م = 3(12–13) 12 – م = 3×–1 12 – م = –3 م= 12+3= 15 (أ)
(2)	إذا كانت نسبة الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن العلامة (80) هي 75٪ فكم تكون الرتبة المثينة للعلامة 80: أ) 25٪ ب) 75٪ جـ) 80٪ د) 20٪	نسبة الطلبة الذين نريد علامتهم عن (80) = 75٪ نسبة الطلبة الذين تقل علاماتهم عن 80 أو تساويها = 25٪ إذن الرتبة المئتية للعلامة 80 هي = 25٪ (أ) بمعنى : $م_{25}$= 80 تذكير $م_{20}$ = المئين = مشاهدة = 13 ↓ رتبة مئنة ↓ نسبة مئوية 13 : العلامة التي يقل عنها أو يساويها 20٪ من القيم 20 : 20٪ من الطلبة علامتهم تساوي 13 أو أقل

(3)	الربيــع الأول للقيـم : 6، 5، 4، 3، 7، 9، 10 أ) 3 ب) 4 ج) 5 د) 6	الربع الأول= ر$_1$= م$_{25}$ رتبة المئين= $\frac{25}{100}$ × (عدد القيم +1) $= \frac{25}{100} \times (7+1) = \frac{200}{100} = 2$ =المشاهدة الثانية - ترتيب القيم تصاعدياً : 3، 4، 5، 6، 7، 9، 10 الربيع الأول = م$_{25}$= 4 (ب)
(4)	إذا كـان الوسـط الحسابي لمجموعة من البيانات (50) والتباين (16) فإن القيمة الأصلية للقيمة المعيارية ع = −2.5 هي أ) 45 ب) 40 ج) 10 د) 60	$\overline{\text{س}}$ = 50، تباين = 16 ← $\delta = \sqrt{16} = 4$ المطلوب (س) المقابلة لـ ع= −2.5 ع= $\frac{\text{س} - \overline{\text{س}}}{\delta}$ ⟷ $\frac{-2.5}{1} = \frac{\text{س} - 50}{4}$ −10= س−50 ⟷ −10+50=س س= 40(ب)
(5)	في دراســة إحــصائية اســتهدفت طلبــة كليات المجتمع ، أخذت عينة عشوائية من كل كلية يتناسب عددها مع عدد الطلبة فيها فإن هذه العينة تسمى. أ) عنقودية ب) منتظمة ج) معيارية د) طبقية	العينة طبقية (د) كليات مجتمع ↓ ↓ ↓ ↓ ↓ أ ب ج د هـ بمـا أن العينـات الجزئيـة مختلفـة مـن حيـث العدد بناء على عدد كل كلية إذن طبقية
(6)	أحــد الأعــداد التاليــة يمثــل ارتبـــاط عكسي بين متغيرين أ) 0.3 ب) −1.2 ج) 0 د) −0.7	ارتباط عكسي ← محصور بين −1، 0 إذن −0.7 (ج)

	السؤال	الحل
(7)	الإنحراف المتوسط للقيم: 0، 2، 4، 6 أ) 2 ب) 3 جـ) 8 د) صفر	الانحراف المتوسط = $\frac{\sum \lvert س - \bar{س} \rvert}{ن}$ $\bar{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{0+2+4+6}{4} = \frac{12}{4} = 3$ س: 0، 2، 4، 6، مجموع $س - \bar{س}$: -3، -1، 1، 3 $\lvert س - \bar{س} \rvert$: 3، 1، 1، 3، 8 الانحراف المتوسط = $\frac{8}{4} = 2$ (أ)
(8)	تقدم (12000) طالب للامتحان الشامل نجح منهم (9000) طالب وتم تمثيل النتائج بطريقة الدائرة فما هي زاوية القطاع الدائري للناجحين أ) 90 ب) 120 جـ) 240 د) 270	زاوية القطاع = $\frac{\text{عدد الطلبة في القطاع}}{\text{العدد الكلي}} \times 360$ $= \frac{9000}{12000} \times 360 = 270$ (د)
(9)	إذا كان مجموع (20) مشاهدة هو (300) وأضيف (5) لكل مشاهدة فإن الوسط الحسابي للمشاهدات بعد الزيادة أ) 15 ب) 20 جـ) 12 د) 30	الوسط الأصلي = $\frac{\sum س}{ن} = \frac{300}{20} = 15$ التعديل = إضافة (5) الوسط الجديد = القديم +5 = 15 + 5 = 20 (ب)
(10)	ما قيمة الوسيط: 0، 8، 10، 1، 10، 11 أ) 10 ب) 11 جـ) 13 د) 9	نرتبها تصاعديا: 0، 1، 8، 10، 10، 11 $\frac{10+8}{2} = 9$ (د)
(11)	إذا كان التباين مجموعه قيم = 9 فما قيمة الانحراف المعياري لنفس هذه القيم أ) 18 ب) 4.5 جـ) 18 د) 3	الانحراف المعياري = $\sqrt{\text{التباين}} = \sqrt{9} = 3$ (د)

(12)	إذا كان رقم لاسبير = 154.76٪ رقم باش = 153.5٪ فإن رقم فيشر الأمثل = أ) 140.3٪ ب) 154.13 جـ) 150.63٪ د) 157.11٪	رقم فيشر = $\sqrt{\text{لاسبير} \times \text{باش}}$ ٪ = $\sqrt{153.5 \times 154.76}$ ٪ = 154.13٪ (ب)
(13)	ما قيمة المتوسط المتحرك الثاني بطول (4) للسلسلة الزمنية التالية: 6، 10، 8، 4، 12، 30 أ)7 ب)14 جـ)17 د) 8.5	الأصلية : 6، 10، 8، 4، 12، 30 الجديدة : $\frac{6+10+8+4}{4}$ ، $\frac{10+8+4+12}{4}$ ، $\frac{8+4+12+30}{4}$ الجديدة : 7، 8.5، 13.5 المتوسط المتحرك الثاني = 8.5 (د)
(14)	حسبت معادلة الاتجاه العام لسلسلة زمنية لخمس سنوات فكانت س= 30ن+ ب وكان $\sum$ س= 620 جد قيمة ب أ) 170 ب) 34 جـ ______ 3(د)530	معادلة الاتجاه العام = معادلة انحدار س عن ن س= 30 ن + ب أ = 30 ب= $\bar{س}$ − 30$\bar{ن}$ $\bar{س}$ = $\frac{\sum س}{ن}$ = $\frac{620}{5}$ $\bar{س}$ = 124 ن: 1، 2، 3، 4، 5 $\bar{ن}$ = $\frac{\sum ن}{العدد}$ = $\frac{15}{5}$ $\bar{ن}$ = 3 ب= 124 − (30×3) = 124 − 90 = 34 ب= 34 (ب)

(15)	إذا كانت معادلة انحدار علامة الإحصاء (س) والاقتصاد (ص) هي : س = 180.7 – 1.2 ص وحصل طالب على علامة (90) في الاقتصاد كم تكون علامته المتوقعة في الإحصاء أ) 65.3 ب) 82.1 جـ) 72.7 د) 95.2	س= 180.7 – (1.2 × 90) س= 180.7 – 108= 72.7 (جـ)
(16)	إذا كانت قيمة معامل الارتباط بين س، ص يساوي (0.50) ما طبيعة الارتباط أ) طردي ب) عسكي جـ) تام د) لا يوجد ارتباط	الطردي ← محصور بين 0، 1 إذن ر = 0.50 ← طردي (أ)
(17)	في توزيع طبيعي لعلامات (1000) طالب كان $\bar{س}$ = 62، δ = 10، ما عدد الطلبة الذين تزيد علاماتهم عن 72، علماً بأن المساحة إلى يسار (ع=1) هي 0.84 أ) 840 ب) 160 جـ) 340 د) 660	72 $\bar{س}$=62 ع=1 س=0 المساحة = ل(س>72) = ل(ع>1) ل (ع>1) = 1– ل(ع<1) = 1– 0.84 = 0.16 عدد الطلبة = العدد الكلي × ل(ع>1) = 1000× 0.16 = 160 طالب (ب)

(18)	إذا كان عدد سكان مدينة عام 1990 هو (200) ألف نسمة، وعددهم عام 1996 هو (500) ألف نسمة ما معدل الزيادة السكانية السنوية: أ) 300 ألف لكل سنة ب)50 ألف لكل سنة. جـ)400 ألف لكل سنة د)42.8 ألف لكل سنة	معدل الزيادة السكانية السنوية= $\frac{\text{عدد السكان في نهاية الفترة – عددهم في البداية}}{\text{طول الفترة الزمنية}}$ $= \frac{500000 - 200000}{1996 - 1990} = \frac{300000}{6}$ = 50000 = (50) ألف لكل سنة (ب)
(19)	إذا كان عدد سكان مدينة في منتصف عام 2000 هو مليون نسمة وعدد الوفيات = 5000 شخص وعدد المواليد الأحياء = 8000 طفل ما معدل الوفاة العام في المدينة لعام 2000 أ) 3 لكل ألف ب) 625 لكل ألف جـ) 8 لكل ألف د) 5 لكل ألف	معدل الوفاة العام = $\frac{\text{عدد الوفيات}}{\text{عدد السكان}}$ ×1000 $= \frac{5000}{1000000} \times 1000$ = 5 لكل ألف (د)
(20)	إذا كان مجموع أسعار سنة الأساس = 180 و مجموع أسعار سنة المقارنة = 150 فما قيمة الرقم القياسي التجميعي للأسعار: أ) 120٪ ب)20٪ جـ) 83.3٪ د) 16.7٪	الرقم القياسي التجميعي = $\frac{\text{مج ن}}{\text{مج س}}$ ×100٪ ع ن: أسعار سنة المقارنة ع س: أسعار سنة الأساس $= \frac{150}{180} \times$ 100٪ = 83.3٪ (ج)

امتحان 2004 الدورة الشتوية

1

مجموع انحرافات القيم عن وسطها الحسابي

أ) 0 ب) 1 ج) قيم الوسط د) 2

قاعدة : مجموع انحرافات القيم عن الوسط = صفر

(أ)

2

من العينات الاحتمالية العشوائية

أ) القصدية ب) الحصصية

ج) العنقودية د) الصدفه

العينة العشوائية من أنواعها ← العنقودية

(جـ)

3

المنوال للقيم : 2، 4، 6، 8، 10

أ) 2 ب) 4

جـ) 6 د) لا يوجد منوال

لا توجد قيمة تكررت أكثر من غيرها

إذن لا يوجد منوال (د)

4

الوسيط للقيم : 6، 10، 3، 7، 4، 8

أ) 6 ب) 6.5 جـ) 7 د) 7.5

ترتيب تصاعدي : 3، 4، 6، 7، 8، 10

الوسيط = $\frac{7+6}{2} = \frac{13}{2} = 6.5$

5

الانحراف المعياري للقيم (2، 4، 5، 7)

أ) 3 ب) $\sqrt{2}$

جـ) 2.25 د) $\sqrt{3.25}$

الانحراف للقيم = $\sqrt{\text{التباين للقيم}}$

التباين للقيم = $\frac{\sum س^2}{ن} - (\overline{س})^2$

$\overline{س} = \frac{\sum س}{ن} = \frac{2+4+5+7}{4} = \frac{18}{4}$

$\overline{س} = 4.5$ ، ن= 4 عدد القيم

س	$س^2$	
2	4	
4	16	
5	25	
7	49	
مجموع	94	

التباين = $\frac{94}{4} - (4.5)^2$

$= 23.5 - 20.25$

$= 3.25$

الانحراف المعياري = $\sqrt{3.25}$ (د)

6

واحد من التالية من مقاييس التشتت

أ) الوسط الحسابي ب) الانحراف المعياري

جـ) المنوال د) الوسيط

الانحراف المعياري (ب)

7

إذا رمينا قرشاً كامل الاتزان دون تحيز في الهواء مرتين فإن احتمال أن تظهر الصورة في كلا الرميتين.

أ) $\frac{1}{2}$ ب) $\frac{1}{16}$ جـ) $\frac{1}{4}$ د) 2

الرمية الأولى	الثانية	ناتج
ص	ص	(ص ص)
	ك	(ص ك)
ك	ص	(ك ص)
	ك	(ك ك)

ل(ص ص) = $\frac{1}{4}$ (ج)

8

إذا كان الوسط الحسابي لست مشاهدات (10) والوسط الحسابي لأربع مشاهدات (7.5) فإن الوسط الحسابي المرجح للبيانات هو :

أ) 9 ب) 14 جـ) 7 د) 17.5

عدد كل المشاهدات = 6+4=10

الوسط الحسابي الكلي = ؟؟

الوسط (6) مشاهدات	الوسط لـ 4 مشاهدات
$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$	$\bar{س} = \frac{\sum س}{ن}$
$\frac{10}{1} = \frac{س}{6}$	$\frac{7.5}{1} = \frac{\sum س}{4}$
$\sum س = 60$	$\sum س = 30$

الوسط المرجح = $\frac{\sum س_1 + \sum س_2}{ن_1 + ن_2} = \frac{60+30}{6+4}$

الوسط المرجح = $\frac{90}{10} = 9$ (أ)

9

س، ص متغيران يأخذ كل منهما (10) قيم إذا كان مجموع مربعات الفروق بين رتب هذه القيم (28) فإن قيمة معامل ارتباط سبيرمان:

أ) 0.60 ب) 0.70 جـ) 0.50 د) 0.40

معامل ارتباط سبيرمان = $1 - \frac{6\sum ف^2}{ن(ن^2-1)}$

ن = عدد القيم = 10

مجموع مربعات الفروق بين الرتب

$= \sum ف^2 = 28$

معامل ارتباط سبيرمان = $1 - \frac{6 \times 28}{10(100-1)}$

$= 1 - \frac{6 \times 28}{990} = 1 - 0.17$

$= 0.83 \approx 0.8$

الاجابة غير موجودة نأخذ إجابة 0.70 (ب)

10

إذا أخذت الفئة (20–24) من جدول تكراري فإن طول الفئة يساوي

أ) 4 ب) 5 جـ) 6 د) 2

طول الفئة = (الأعلى – الأدنى) +1

= (24–20) +1 = 5 (ب)

11

نوع المتغير في الغرفة الصفية

أ) متصل ب) نوعي

جـ) مستمر د) كمي منفصل

بما أن عدد الطلاب بالصف = معدود ومحصود إذن المتغير = كمي منفصل (د)

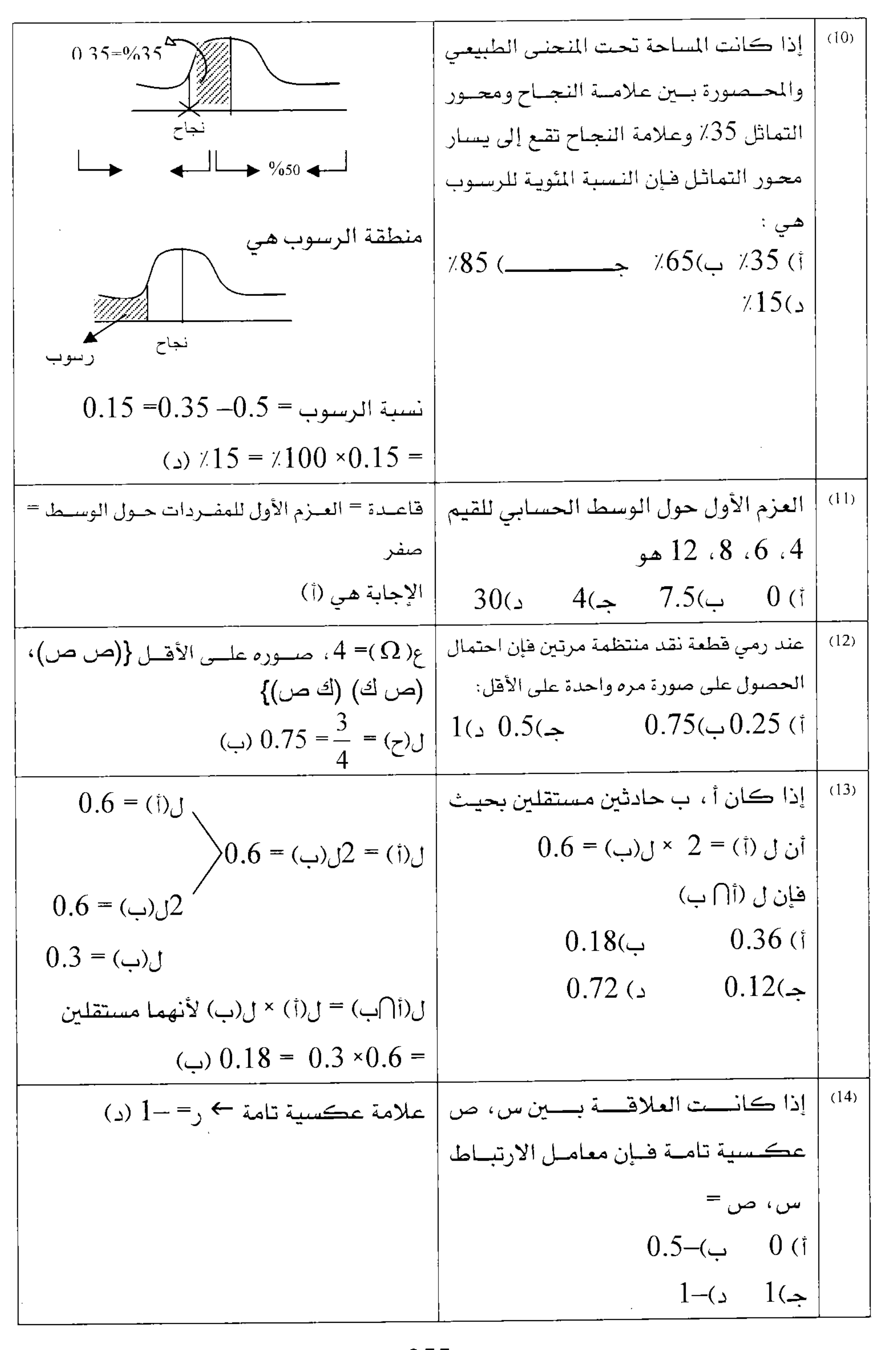
الرقم	السؤال	الحل
12	إذا كانت تحت (z= −2) هي 0.0228 فإن المساحة فوق (z=−2) هي أ) 0.9871 ب) 0.9775 جـ) 0.9772 د) 9872	0.0228 ع = −2 (1) المساحة فوق ع = −2=1 − المساحة تحت ع = 2 = 1 − 0.0228 = 0.9772 (جـ)
13	أي من معاملات الارتباط هو الأفضل أ) 0.75 ب) −0.97 جـ) 0.95 د) 0.85	كلما اقترب معامل الارتباط من الأطراف [−1، 1] كان أقوى أقرب رقم للأطراف هو −0.97 أقوى معامل ارتباط = −0.97 (ب)
14	الغرم الأول للمشاهدات 6، 3، 8، 9، 5، 7، 4 حول الصفر يساوي	الغرم الأول حول الصفر = الوسط الحسابي $= \frac{\sum س}{ن} = \frac{42}{7}$ = 6 (ب)
15	إذا كان الوسط الحسابي لتوزيع ما يساوي (80) والانحراف المعياري يساوي (5) فإن العلامة المعيارية التي تقابل العلامة (70) هي أ) 0.2 ب) 2 جـ) −0.2 د) −2	$\bar{س} = 80$، $\delta = 5$، س = 70 $ع = \frac{س - \bar{س}}{\delta} = \frac{70 - 80}{5} = \frac{-10}{5}$ ع = −2 (د)
16	إذا كان ح1 ، ح2 حدثين مستقلين وكان ل(ح1) =0.3 ل(ح2) = 0.4 فإن ل(ح1∩ح2) = تساوي أ) 0.7 ب) 0.12 جـ)0.82 د) 0.85	بما أن ح1 ، ح2 مستقلين إذن ل(ح1∩ح2) = ل(ح1) × ل(ح2) = 0.3× 0.4 = 0.12 (ب)
17	إذا كانت معادلة انحدار علامات الإحصاء (ص) على علامات المحاسبة (س) هي ص = $\frac{1}{4}$س+ 30 وكانت علامة أحد الطلاب في المحاسبة (80) فإن علامته بالإحصاء: أ) 60 ب) 70 جـ)50 د)20	ص = $\frac{1}{4}$س + 30 ص= ($\frac{1}{4}$ × 80) +30= 20+30 ص = علامته بالإحصاء = 50(جـ)

18	نسبة عدد المواليد الأحياء إلى عدد السكان في منتصف العام هو تعريف لمعدل أ) الخصوبة العام ب) الولادة العام جـ) الخصوبة للنساء المتزوجات د) معدل الخصوبة الكلية		معدل الولادة الخام = عدد الأحياء / عدد السكان (ب)
19	إذا كان عدد المواليد الأحياء لعام 97 سبعين ألف طفل وكان عدد السكان في منتصف ذلك العام خمسة وعشرين مليوناً فإن معدل الولادة الخام = أ) 6.1/ ألف طفل ب) 2.8/ ألف طفل جـ) 4.8/ ألف طفل د) 1.1/ ألف طفل		معدل الولادة = عدد المواليد الأحياء / عدد السكان $= \frac{70000}{25000000} \times 1000 = \frac{70}{25}$ = 2.8/ ألف طفل (ب)
20	معامل الخشونة للسلسلة الزمنية 3، 3، -3 يساوي أ) 1.35 ب) 4.05 جـ) 1.8 د) -1.8		البسط: 3، 3، 3- ← 0، 6- ← 0 + 36 = 36 المقام: 3، 3، 3-؛ $\bar{س} = \frac{مجـ س}{ن} = 1$؛ 3 - 1، 3- - 1 ← 2، 4- ← 4 + 16 = 20 معامل الخشونة = $\frac{36}{20} = \frac{18}{10} = \frac{9}{5}$ = 1.8 (جـ)

امتحان عام (2005) الدورة الشتوية

	السؤال	الحل
(1)	كلية تضم عده تخصصات مختلفة يراد اختيار عينة تمثل كل الطلاب في الكية فإن أفضل أسلوب لاختيار هذه العينة هو العينة العشوائية: أ) البسيطة ب) المنتظمة جـ) الطبقية د) العنقودية	الكلية mis Ais تمريض .... العينة الطبقية (جـ)
(2)	إذا كانت علامات (30) طالب تقع فوق العلامة 65 فإن الرتبة المئينة للعلامة 65 هي (حيث عدد الطلاب الكلي 50) أ) 60٪ ب)40٪ جـ) 65٪ د) 35٪	ك٪ من الطلبة علامتهم أقل أو تساوي (65) = رتبة مئينة 30 طالب فوق 65 إذن 20 طالب يساوي أو أقل من 65 نسبة الطلبة الذين علامتهم أقل أو يساوي 65 = $\frac{20}{50} = \frac{2\times 20}{2\times 50} = \frac{40}{100} =$ 40٪ (ب)
(3)	لتمثيل جدول تكراري باستخدام المنحنى التراكمي الصاعد فإننا نعين على المحور الأفقي (محور السينات) أ) حدود فعلية ب) مراكز الفئات جـ) تكرار تراكمي د) التكرار	المحور السني ← الحدود الفعلية المحور الصادي← تكرار تراكمي الإجابة هي (أ)
(4)	العشير السابع للقيم: 11، 9، 6، 16، 17، 3، 22، 5، 8 أ) 13.5 ب) 16 جـ) 17 د)10.5	العشير السابع= م رتبة المئين = $\frac{70}{100} \times (1+9)$ $= \frac{70}{100} \times 10 = 7$ (المشاهدة السابعة بعد الترتيب) تصاعدياً: 3، 5، 6، 8، 9، 11، 16، 17، 22 $م_{70}$ $م_{70} = 16$ (ب)

	السؤال	الحل
(5)	المنوال للقيم: 5، 5، 5، 5، 5، 5 أ) 5 ب) 6 جـ) 0 د) لا يوجد منوال	المنوال = القيمة الأكثر تكرار = لا يوجد الإجابة هي (د)
(6)	مدى القيم : 17، 20، 14، 9، 12، 5، 6 أ) 15 ب) 11 جـ) 7 د) 9	المدى = أكبر قيمة – أصغر قيمة = 20 – 5 = 15 (أ)
(7)	إذا كان الانحراف المعياري لمجموعة قيم يساوي (4) وضربت كل قيمة بالعدد (–3) وأضيف لها العدد (15) فإن الانحراف المعياري بعد التعديل = أ) 3 ب) 27 جـ) 12 د) –12	الانحراف يتأثر بالضرب والقسمة المطلقة للعدد. للتعديل : ضرب القيمة في (–3) وجمع 15 الانحراف الجديد = القديم × $\lvert -3 \rvert$ = 4×3=12 (جـ)
(8)	إذا كانت أوزان مجموعة طلاب تتبع التوزيع الطبيعي بوسط حسابي 60كغم وانحراف معياري 5 كغم فإن القيمة المعيارية للوزن 55 كغم أ) –5 ب) 5 جـ) –1 د) 1	$\bar{س} = 60$، $\delta = 5$، س = 55 $ع = \frac{س - \bar{س}}{\delta} = \frac{55 - 60}{5} = \frac{-5}{5}$ ع = –1 (جـ)
(9)	إذا كان معامل التفرطح لتوزيع تكراري يساوي (3.6) فإن التوزيع يعتبر أ) مفرطحاً ي) متماثلاً جـ) معتدلاً د) مدبباً	معامل التفرطح = 3 ← معتدل (متماثل) معامل التفرطح <3 ← مفرطح معامل التفرطح >3 ← مدبب المعامل = 3.6> 3 ← مدبب (د)



	السؤال	الإجابة
(10)	إذا كانت المساحة تحت المنحنى الطبيعي والمحصورة بين علامة النجاح ومحور التماثل 35٪ وعلامة النجاح تقع إلى يسار محور التماثل فإن النسبة المئوية للرسوب هي : أ) 35٪ ب) 65٪ جـ) 85٪ د) 15٪	 منطقة الرسوب هي نسبة الرسوب = 0.5 − 0.35 = 0.15 = 0.15 × 100٪ = 15٪ (د)
(11)	العزم الأول حول الوسط الحسابي للقيم 4، 6، 8، 12 هو أ) 0 ب) 7.5 جـ) 4 د) 30	قاعدة = العزم الأول للمفردات حول الوسط = صفر الإجابة هي (أ)
(12)	عند رمي قطعة نقد منتظمة مرتين فإن احتمال الحصول على صورة مره واحدة على الأقل: أ) 0.25 ب) 0.75 جـ) 0.5 د) 1	ع(Ω) = 4، صوره على الأقل {(ص ص)، (ص ك) (ك ص)} ل(ح) = $\frac{3}{4}$ = 0.75 (ب)
(13)	إذا كان أ ، ب حادثين مستقلين بحيث أن ل(أ) = 2 × ل(ب) = 0.6 فإن ل(أ∩ب) أ) 0.36 ب) 0.18 جـ) 0.12 د) 0.72	ل(أ) = 2ل(ب) = 0.6 ل(أ) = 0.6 2ل(ب) = 0.6 ل(ب) = 0.3 ل(أ∩ب) = ل(أ) × ل(ب) لأنهما مستقلين = 0.6 × 0.3 = 0.18 (ب)
(14)	إذا كانت العلاقة بين س، ص عكسية تامة فإن معامل الارتباط س، ص = أ) 0 ب) −0.5 جـ) 1 د) −1	علاقة عكسية تامة ← ر = −1 (د)

	السؤال	الحل
(15)	ما توقع عدد الأطفال الإناث في العائلة المكونة من (6) أطفال: أ) 1 ب) 2 جـ) 3 د) 6	ن= 6، أ= المولود أنثى = $\frac{1}{2}$ التوقع = ن× أ = 6 × $\frac{1}{2}$ = 3 (جـ)
(16)	المعدل المتحرك الثاني بطول (3) للسلسلة 5، 4، 3، 8، 10، 9، 11، 10 أ) 4 ب) 8 جـ) 9 د) 5	السلسلة الجديدة هي $\frac{3+4+5}{3}$ ، $\frac{8+3+4}{3}$ ، $\frac{10+8+3}{3}$ ، .... $\frac{15}{3}$=5 المعدل المتحرك الثاني = 5 (د)
(17)	إذا كانت معادلة الانحدار التنبؤ بقيم ص هي: ص = 3س+ ب حيث الوسط الحسابي للقيم س(20) والوسط الحسابي لقيم ص (70) فإن قيمة (ب) أ) 10 ب) −10 جـ) 50 د) −50	الوسط الحسابي للمتغيرين س، ص يحقق معادلة الانحدار أي أن $\overline{س}$=20، $\overline{ص}$=70 ص= 3س + ب 70 (30×20) + ب ← ب= 70−60 ب= 10 (أ)
(18)	إذا كان سعر سلعة عام 90 هو 3 دنانير و سعرها عام 2005 هو 6 دنانير فإن الرقم القياس سعر عام 2005 (اعتبر 90 سنة الأساس) أ) 300٪ ب) 200٪ جـ) 50٪ د) 150٪	الرقم القياس البسيط = $\frac{\text{سعر المقارنة}}{\text{سعر الأساس}}$ ×100٪ = $\frac{6}{3}$ × 100٪ = 200٪ (ب)
(19)	إذا كان عدد المواليد الأحياء في مدينة عام 92 هو (9000) طفل وعدد الوفيات في نفس العام هو (2000) فإن معدل الزيادة الطبيعية لهذه المدينة (لكل ألف) عام 92 علماً بأن عدد سكان هذه المدينة مليون نسمة أ) 11 ب) 9 جـ) 7 د) 2	معدل الزيادة الطبيعية = $\frac{\text{عدد المواليد − الوفيات}}{\text{عدد السكان}}$ ×100 = $\frac{9000-2000}{1000000}$ × 1000 = 7 (جـ)

(20)	إذا كان عدد المواليد الأحياء عام 95 في مدينة (3000) طفل وعدد النساء في سن الحمل في نفس العام (3) ملايين فإن معدل الخصوبة العام لكل (1000) عام 95 أ) 1 ب) 10 جـ) 100 د) 1000	معدل الخصوبة العام = $\frac{\text{عدد المواليد الأحياء}}{\text{عدد النساء بسن الحمل}} \times 1000$ $= \frac{3000}{3000000} \times 1000 = 1$ (أ)

امتحان عام (2006) الدورة الشتوية

<table>
<tr><td>(1)</td><td>يراد اختيار عينة منتظمة حجمها (20) من مجتمع إحصائي عدد أفراده (300) إذا كان رقم الفرد الأول في العينة (4) فإن رقم الفرد الثاني في العينة هو:
أ) 8   ب) 15   جـ) 24   د) 19</td><td>لاحظ أن رقم الفرد الأول = 4 هذا يعني أن العينة منتظمة ويبقى معرفة كم المقدار الذي يجب أن نقفزه بين فرد وآخر علماً أن أول فرد هو الرابع
رقم القفز = $\frac{\text{العدد الكلي}}{\text{عدد أفراد العينة}} = \frac{300}{20} = 15$
الفرد الثاني = 4+15= 19 (د)</td></tr>
<tr><td>(2)</td><td>إذا كانت انحرافات (4) قيم عن وسطها الحسابي هي (س، 3–2س، 7 ، 5) فما قيمة المتغير س:
أ)0   ب)15   جـ)–15
د)4</td><td>مجموع انحرافات القيم عن الوسط= صفر
س+ 3–2س+7+5= صفر
س–2س+ 3+7+5= ∴
– س+ 15 = ∴ ← س= 15 (ب)</td></tr>
<tr><td>(3)</td><td>الانحراف المتوسط (0، 2، 4، 6) هو
أ) 2   ب)3   جـ)8   د)صفر</td><td>$\bar{س} = \frac{0+2+4+6}{4} = \frac{12}{4} = 3$
الانحراف المتوسط للقيم = $\frac{\sum |س - \bar{س}|}{ن}$
<table><tr><td>س</td><td>س–$\bar{س}$</td><td>|س–$\bar{س}$|</td></tr><tr><td>0</td><td>-3</td><td>3</td></tr><tr><td>2</td><td>-1</td><td>1</td></tr><tr><td>4</td><td>1</td><td>1</td></tr><tr><td>6</td><td>3</td><td>3</td></tr><tr><td>مجموع</td><td></td><td>8</td></tr></table>الانحراف المتوسط = $\frac{8}{4} = 2$ (أ)</td></tr>
</table>

(4)	إذا كان مجموع (6) قيم هو (60) ومجموع (9) قيم أخرى هو (45) فإن الوسط الحسابي لكل القيم هو: أ) 7 ب) 8 جـ) 7.5 د) 105	القيم الأولى | القيم الثانية ن1 = 6 | ن2 = 9 $\sum$س = 60 | $\sum$ص = 45 $\bar{س} = \frac{\sum س + \sum ص}{ن1 + ن2} = \frac{60+45}{6+9} = \frac{105}{15}$ $\bar{س} = 7$ (أ)
(5)	إذا كان الوسط الحسابي لمجموعة من البيانات (50) وتباينها (16) فإن القيمة التي لها القيمة المعيارية (−2.5) أ) 10 ب) 40 جـ) 45 د) 60	$\bar{س} = 50$ ، التباين = 16 ، ع = −2.5 المطلوب : س $ع = \frac{س - \bar{س}}{\delta} \Leftrightarrow -2.5 = \frac{س - 50}{\delta}$ $\delta = \sqrt{التباين} = \sqrt{16} = 4$ $\frac{س - 50}{4} \times \frac{-2.5}{1}$ $10 = س - 50 \Leftrightarrow 10+50 = س$ س = 60 (د)
(6)	العشير السابق للقيم: 6، 9، 11، 5، 20، 17، 4، 16، 3 أ) 13.5 ب) 17 جـ) 16 د) 10.5	العشير السابع = $ع_7$ = $م_{70}$ الرتبة = $\frac{70}{100} \times (9+1)$ $= \frac{70}{100} \times 10 = 7$ تصاعدياً: 3، 4، 5، 6، 9، 11، 16، 17، 20 $ع_7 = 16$ (جـ)

(7)	إذا كان لدينا فئة تكرارها النسبي (0.2) فكم تكرارها الأصلي علماً بأنها أخذت من جدول تكراري فيه مجموع التكرارات (50) أ) 2 ب) 5 جـ) 25 د) 10	التكرار النسبي = 0.2، مجموع التكرارات = 50 التكرار الأصلي=؟؟ التكرار النسبي = $\frac{\text{الأصلي}}{\text{مجموع التكرارات}}$ $\frac{2}{10} = \frac{\text{التكرار الأصلي}}{50}$ 100= 10× التكرار الأصلي التكرار الأصلي = $\frac{100}{10}$ = 10 (د)
(8)	في توزيع غير متماثل إذا كان الوسط الحسابي (45) والوسيط (36) فإن المنوال. أ) 18 ب) 28 جـ) 42 د) 72	الوسط– المنوال = 3(الوسط– الوسيط) 45–م=3(45–36) 45–م= 3 ×9= 27 45– 27= م = 18 (أ)
(9)	الوسيط للقيم (21، 9، 5، 12، 15، 19) أ) 8.5 ب) 13.5 جـ) 12 د) 15	ترتيب تصاعدي 5، 9، 12، 15، 19، 21 الوسيط = $\frac{12+15}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$ (ب)
(10)	الغرم الأول للمشاهدات (1، 2، 3، 4، 5، 6) حول الصفر يساوي أ) صفر ب) 3.5 جـ) 6 د) 21	الغرم الأول حول الصفر = الوسط الحسابي = $\frac{\sum س}{ن}$ = $\frac{1+2+3+4+5+6}{6} = \frac{21}{6} = 3.5$ (ب)

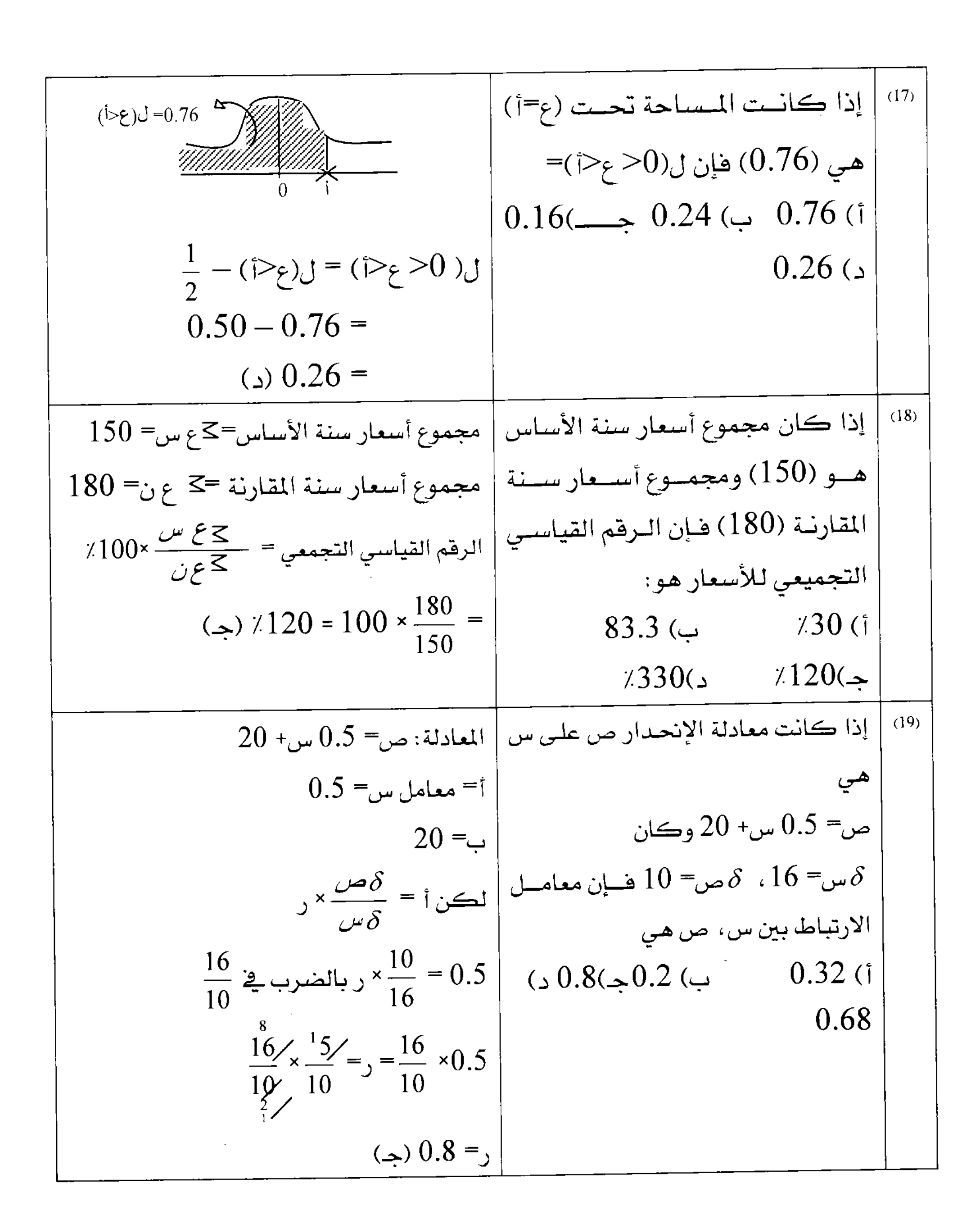
(11)	معامل الخشونة للسلسلة الزمنية 4، 4، 6، 6، 6، 4 يساوي أ) 0.625 ب) 2.5 جـ)2 د) 1.6

البسط	المقام
4 6 6 6 4 4 0 2 0 0 −2 +0 +4 +0 +0 4 (8)	$\bar{س} = \frac{مج س}{ن} = \frac{30}{6} = 5$ 4 4 6 6 6 4 × 5−4 5−6 5−6 5−6 5−4 −1 1 1 1 −1 +1 +1 +1 +1 1 (5)

معامل الخشونة = $\frac{8}{5}$ = 1.6 (د)

(12)	إذا كان تباين (5) قيم يساوي (9) وضربت كل قيمة بالعدد (2) فإن التباين للقيم الجديدة (بعد الضرب) هو أ) 12 ب) 6 جـ) 36 د) 20	التباين الجديد= القديم × (|العدد|)2 = 9× (|2|)2 = 9×4= 36 (جـ)

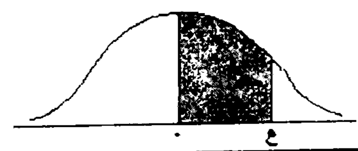
	السؤال	الحل
(13)	إذا كان ل(أ) = $\frac{1}{3}$ ، ل(ب)= $\frac{1}{4}$ ل(أ⋂ب)= $\frac{1}{12}$ فإن ل(أ⋃ب)= أ) $\frac{1}{4}$ ب) $\frac{1}{3}$ جـ) $\frac{1}{2}$ د) $\frac{3}{4}$	ل(أ⋃ب)= ل(أ)+ ل(ب)– ل(أ⋂ب) = $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$ = $\frac{4+3-1}{12}=\frac{6}{12}$ ل(أ ⋃ب)= $\frac{1}{2}$ (جـ)
(14)	إذا كان احتمال نجاح عملية جراحية هو (0.9) أجريت هذه العملية لعشرة مرضى فإن احتمال نجاح العملية لمريض واحد فقط هو أ) $(0.9)^9 \times 0.1$ ب) $(0.9)^9$ جـ) $0.9 \times (0.1)^9$ د) $9 \times (0.1)^9$	احتمال نجاح عملية جراحية = أ= 0.9 ن= 10 المطلوب ر= 1 ← ل(1) ل(ر)= $\binom{ن}{ر} \times (أ)^{ر} \times (1-أ)^{ن-ر}$ ل(1)= $\binom{10}{1} \times (0.9)^1 \times (1-0.9)^{10-1}$ = $10 \times 0.9 \times (0.1)^9$ = $9 \times (0.1)^9$ (د)
(15)	معامل ارتباط سبيرمان للرتب يكون ضمن الفترة أ) [–1 ، 0] ب) [0 ، 1] جـ) [–1 ، 1] د) [–2 ، 2)	معامل الارتباط دائماً محصور بين 1 ، –1 ← [–1 ، 1] (جـ)
(16)	إذا كان سعر كيلو اللحم عام 1970 هو (1.5) دينار وأصبح سعره عام 1980 هو (3) دنانير فإن الرقم القياسي البسيط لسعر اللحم هو أ) 150٪ ب) 200٪ جـ) 250٪ د) 300٪	الرقم البسيط للسعر = $\frac{\text{سعر المقارنة}}{\text{سعر الأساس}}$ × 100٪ = $\frac{3}{1.5}$ × 100٪ = 2 × 100٪ = 200٪ (ب)



(17)	إذا كانت المساحة تحت (ع=أ) هي (0.76) فإن ل(0> ع>أ)= أ) 0.76 ب) 0.24 جـ) 0.16 د) 0.26	ل(0> ع>أ) = ل(ع>أ) − $\frac{1}{2}$ = 0.76 − 0.50 = 0.26 (د)
(18)	إذا كان مجموع أسعار سنة الأساس هو (150) ومجموع أسعار سنة المقارنة (180) فإن الرقم القياسي التجميعي للأسعار هو: أ) 30٪ ب) 83.3 جـ)120٪ د)330٪	مجموع أسعار سنة الأساس=∑ع س= 150 مجموع أسعار سنة المقارنة =∑ ع ن= 180 الرقم القياسي التجمعي = $\frac{\text{∑ع س}}{\text{∑ع ن}}$ ×100٪ = $\frac{180}{150}$ × 100 = 120٪ (جـ)
(19)	إذا كانت معادلة الإنحدار ص على س هي ص= 0.5 س+ 20 وكان δس= 16، δص= 10 فإن معامل الارتباط بين س، ص هي أ) 0.32 ب) 0.2جـ)0.8 د) 0.68	المعادلة: ص= 0.5 س+ 20 أ= معامل س= 0.5 ب= 20 لكن أ = $\frac{\delta ص}{\delta س}$ × ر 0.5 = $\frac{10}{16}$ × ر بالضرب في $\frac{16}{10}$ 0.5× $\frac{16}{10}$ = ر = $\frac{5}{10}$ × $\frac{16}{10}$ ر= 0.8 (جـ)

(20)	إذا كان عدد المواليد الأحياء في إحدى المدن عام 1992 هو (10000) طفل و عدد الوفيات في نفس العام هو (2000) فإن معدل الزيادة الطبيعية لهذه المدينة لكل ألف هو (عدد سكان هذه المدينة مليون نسمة) أ) 8 ب) 2 جـ) 7 د) 5	معدل الزيادة الطبيعية = $1000 \times \frac{\text{عدد المواليد} - \text{عدد الوفيات}}{\text{عدد السكان}}$ $1000 = \frac{2000-10000}{1000000} =$ $= \frac{8000}{1000000} \times 1000 = 8$ لكل ألف (أ)

جدول التوزيع الطبيعي المعياري



ع	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0754
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224
0.6	0.2258	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2518	0.2549
0.7	0.2580	0.2612	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2996	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4973	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.499[illegible]
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.499[illegible]
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.499[illegible]
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.499[illegible]
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.9	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000	0.5000

جدول الأرقام العشوائية

51772	74640	42331	29044	46621	62898	93582	04186	19640	87056
24033	23491	83587	06568	21960	21387	76105	10863	97453	90581
45939	60173	52078	25424	11645	55870	56974	37428	93507	94271
30586	02133	75797	45406	31041	86707	12973	17169	88116	42187
03585	79353	81938	82322	96799	85659	36081	50884	14070	74950
64937	03355	95863	20790	65304	55189	00745	65258	11822	15804
15630	64759	51135	98527	62586	41889	25439	88036	24034	67283
09448	56301	57683	30277	94623	85418	68829	06652	41982	49159
21681	91157	77331	60710	52290	16835	48653	71590	16159	14676
91097	17480	29414	06829	87843	28195	27279	47152	35683	47280
50532	25496	95652	42457	78547	76552	50020	24819	52984	76168
07136	40876	79971	54195	25708	51817	36732	72484	94923	75986
27989	64728	10744	08396	56242	90985	28868	99431	50995	20507
86181	78949	86601	46258	00477	25234	09903	36574	72139	70185
54308	21154	97810	86764	82869	11785	55261	59009	38714	38723
65541	34371	09591	07889	58892	92843	72828	91341	84821	63886
08263	65952	85762	64236	39238	18776	84303	99247	46149	03229
39817	67906	48236	16057	81812	15815	63700	85915	19219	45943
62257	04077	79443	95203	02479	30763	92486	54083	23631	05325
53298	90276	62545	21944	16580	03878	07516	95715	02526	33537

المصادر والمراجع

المراجع العربية

1- جامعة القدس المفتوحة، مبادئ الإحصاء ، الجزء الثاني، 1995

2- د. زياد رمضان، مبادئ الاحصاء الوصفي والتطبيقي والحيوي، 1991.

3- د. شفيق العتوم و د. فتحي العاروري: الأساليب الإحصائية، دار المناهج للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، 1995.

4- عبد الحسين زيني، الإحصاء السكاني، وزارة التعليم العالي، بغداد، 1980.

5- أ.د عوض منصور وآخرون: علم الاحصاء الوصفي المبرمج، دار صفاء للنشر والتوزيع، عمان، 1999.

6- كامل فليفل وفتحتي حمدان: مبادئ الإحصاء للمهن التجارية، دار المناهج للنشر والتوزيع، عمان، 2004.

7- د. محمد صبحي أبو صالح، د. عدنان محمد عوض: مقدمة في الاحصاء، عمان، مركز الكتب الأردني، 1990.

8- مدني دسوقي مصطفى ، مبادئ في علم الإحصاء ، دار النهضة العربية ، مصر ، 1977.

9- موراي ر. شبيرجل، الإحصاء سلسلة ملخصات شوم، دار مالجدوهيل للنشر ، 1977.

المراجع الإنجليزية

1. Murray R.spiegel, Theory and problemes of statistics, MC Graw- Hill Newyork, 1987.
2. William Mendenhall, Introduction to probability and statistics, 5th edition.

إصدارات حديثة 2008 دار البداية

التفاضل والتكامل	د. احمد عبد السميع
مجتمعية التمريض	ملكة زهدي ملك
مبادئ الاحصاء	د. احمد عبد السميع
بحوث العمليات	د. احمد عبد السميع
أساسيات التمريض	ملكة زهدي ملك
التثقيف الصحي	محمود عبد الغفور
الصحة النفسية التمريضية	محمود عبد الغفور
علم الأدوية	محمود عبد الغفور
تربية الطفل في الإسلام	مصطفى اسعيفان
الاحصاء التربوي	د. أحمد عبد السميع
أقسام الفنادق وإدارة الأغذية	وليد قمحية
الابداع	إيمان
أراء إسلامية	د. عودة الله القيسي
موسوعة كرة القدم	قصي العتابي
فقه اللغة العربية معالجات وردود	د.عودة الله القيسي
أشهر شعراء انجلترا	قصي العتابي
قبص النار	فيصل الجعفري
النقود والبنوك	سامر جلدة
معجم مصطلحات التربية وعلم النفس	هبة عبيد
الإدارة الفندقية	وليد قمحية
فلسطين بين حقيقة اليهود وأكذوبة التلمود	احمد سالم رحال
القياس والتقويم التربوي	إيمان أبو غربية
محاسبة المنشات الخاصة	د. أيمن الشنطي


تم بحمد الله